**قضیه 11:**

برای عدد R ، که تحت جذر باشد ، $\sqrt{R^2} = |R|$ میشود ، در صورتیکه اندکس جذر عدد جفت باشد . به عباره دیگر: ....... $\left(\sqrt[n]{R^n} = |R|\right)$ میشود ، اگر n جفت باشد .

**مثال :**

2. $\sqrt{x^2} = |x|$

ساده سازید :

3. $\sqrt{x^2 - 2zx + z^2} = \sqrt{(x-z)^2} = |x-z|$

4. $\sqrt{x^2 y^6} = \sqrt{(xy^3)^2} = |xy^3| = y^2 |xy|$

**قضیه 12 :**

برای عدد R که تحت جذر است ، و اندکس آن n . اگر n طاق باشد رابطه ذیل صدق میکند: $\sqrt[n]{R^n} = R$ ...........................

**مثال 5 :**

ساده سازید:

5. $\sqrt[3]{(15ab)^3} = ?$ ، $\sqrt[3]{(15ab)^3} = 15ab$

**مثال 6 :**

مقایسه نمایید:

6. $\sqrt{4} X \sqrt{9}$ و $\sqrt{4 X 9}$

$\sqrt{4} X \sqrt{9} = 2 X 3 = 6$ $\sqrt{4 X 9} = \sqrt{36} = 6$

لهذا ................ $\sqrt{4} X \sqrt{9} = \sqrt{4 X 9}$ <---- , است .

قضیه 13 :

برای هر عدد حقیقی a و b در صورتیکه اندکس آن عدد n باشد ، رابطه ذیل صدق میکند :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$$

---

تمرین :

ساده سازید :

5. $\sqrt{(x+2)^2}$ 6. $\sqrt{x^2(y-2)^2}$

7. $\sqrt[4]{(x+2)^4}$ 8. $\sqrt{x^2+8x+16}$

9. $\sqrt[3]{(-4xy)^3}$

---

مثال ها :

ساده سازید:

7. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$

8. $\sqrt{x+2} \times \sqrt{x-2} = \sqrt{(x+2)(x-2)} = \sqrt{x^2-4}$

9. $\sqrt{4} \times \sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}$

ساده نمائید :

10. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

11. $\sqrt{5x^2} = \sqrt{x^2 \times 5} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{5} = |x|\sqrt{5}$

12. $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

13. $\sqrt{216x^5y^3} = \sqrt{36 \times 6 \times x^4 \times x \times y^2 \times y}$

$= |6x^2y|\sqrt{6xy} = 6x^2|y|\sqrt{6xy}$

14. $\sqrt{2x^2-4x+2} = \sqrt{2(x-1)^2}$

$= |x-1|\sqrt{2}$

**تمرین :**

ساده کنید :

10. $\sqrt{19} \times \sqrt{7}$ 11. $\sqrt{X+2y} \times \sqrt{x-2y}$

12. $\sqrt[4]{27} \times \sqrt[4]{3}$ 13. $\sqrt{300}$

14. $\sqrt{36y^2}$ 15. $\sqrt{2x^2+4x+2}$

16. $\sqrt[3]{16}$ 17. $\sqrt[3]{(a+b)^4}$

---

## مشخصات افاده های جذر دار در قضیه ذیل خلاصه میشوند

**قضیه 14 :**

برای هر عدد غیر منفی a ، و هر عدد مثبت b ، دارای اندکس n رابطهٔ ذیل صدق میکند :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

**مثال :**

ساده سازید :

$$15.\quad \sqrt{16x^3y^{-4}} = \sqrt{\frac{16x^3}{y^4}} = \frac{\sqrt{16x^3}}{\sqrt{y^4}} = \frac{\sqrt{16x^2 \times x}}{\sqrt{y^4}} = \frac{4/x/\sqrt{x}}{y^2}$$

$$16.\quad \sqrt[3]{\frac{27y^5}{343x^3}} = \frac{\sqrt[3]{27y^5}}{\sqrt[3]{343x^3}} = \frac{\sqrt[3]{27y^3 \times y^2}}{\sqrt[3]{343x^3}} = \frac{3y\sqrt[3]{y^2}}{7x}$$

**مثال :**

ساده سازید :

$$17.\quad \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

18. $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}=\sqrt[3]{\frac{7}{9}\times\frac{3}{3}}=\sqrt[3]{\frac{21}{27}}=\frac{\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{21}}{3}$

تقسیم نموده ساده سازید.

19. $\frac{18\sqrt{72}}{6\sqrt{6}}=3\cdot\sqrt{\frac{72}{6}}=3\cdot\sqrt{12}=3\cdot\sqrt{4\times3}=3\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

20. $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{32}{2}}=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\times2}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

---

تمرین :

ساده کنید :

18. $\sqrt{\frac{49}{64}}$

19. $\sqrt{\frac{25}{y^2}}$

20. $\sqrt{\frac{7}{5}}$

21. $\sqrt[3]{\frac{7}{125}}$

22. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

23. $\frac{\sqrt{2x^3}}{\sqrt{50x}}$

24. $\frac{\sqrt[3]{24x^3 y}}{\sqrt[3]{3y^4}}$

---

$(\sqrt{3})^4$ و $\sqrt{3^4}$ محاسبه کنید :

$\sqrt{3^4}=3^2=9\ ,\ (\sqrt{3})^4=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=9$

لهذا: $\sqrt{3^4}=(\sqrt{3})^4$

**قضیه 15 :**

برای هر عدد غیر منفی a ، هر اندکس (n) و هر عدد طبیعی (m) ، رابطه ذیل را نوشته کرده میتوانیم :

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

**مثالها:**

ساده سازید :

22. $\sqrt[3]{8^5} + (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$

23. $(\sqrt{(2)})^6 = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

ساده سازید :

24. $3\sqrt{8} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{4 \times 2} - 5\sqrt{2} = 3 \times 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= (6 - 5)\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

25. $(4\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 5\sqrt{2}) = 4(\sqrt{3})^2 - 20\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3}$

$- 5(\sqrt{(2)})^2 = 4 \times 3 - 20\sqrt{6} + \sqrt{6} - 5 \times 2$

$= 12 - 19\sqrt{6} - 10$

$= 2 - 19\sqrt{6}$

---

**تمرین :**

ساده نمائید :

25. $\sqrt[3]{27^{10}}$

26. $(\sqrt{3})^8$

27. $7\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 8\sqrt{20}$

28. $5\sqrt[3]{16y^4} + 7\sqrt[3]{2y}$

29. $(\sqrt{3} - 5\sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})$

## جنبه تطبیقی افاده های جذر دار :

مثال 26 : سرعت یك موتر در حالت ( لخشیدن ) :

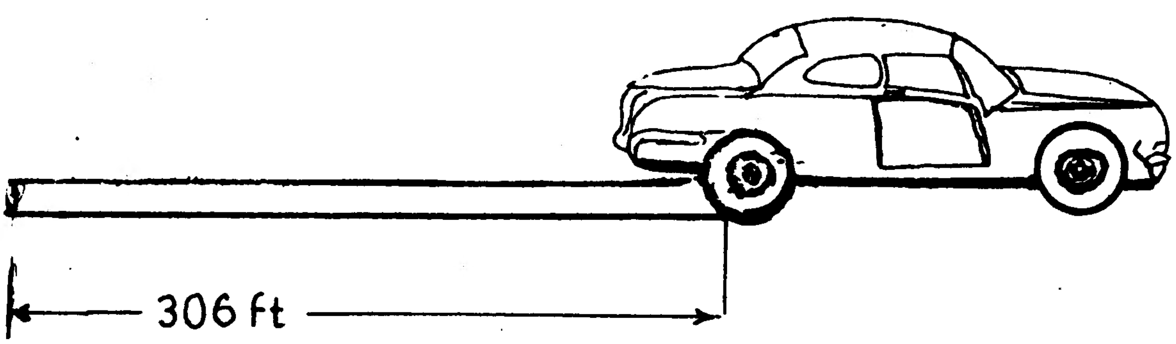
وقتیکه یك موتر ران ، در حالت رفتار ، دفعتاً برك میگیرد . در آنصورت موتر به یك مسافه معین بالای سرك می لخشد . و از آن خط های سیاه بالای سرك باقی می ماند .

جهت دریافت سرعت موتر رابطه ذیل بکار میرود !

$$r = 2\sqrt{5L}$$

r سرعت تقریبی موتر به واحد میل فی ساعت – ( mph ) است که به فاصله L ( به واحد فت ) خط سیاه را بالای سرك نشانی گذاشته است .

مثال : اگر طول خط سیاه ( مسافه لغزش ) 306 فت باشد ، سرعت تقریبی موتر را معلوم کنید ؟




$$r = 2\sqrt{5L}, \qquad r = 2\sqrt{5(306)} = 2\sqrt{1530}$$

$$= 2(39.115)$$

$$= 78.23$$ ( سرعت موتر به میل فی ساعت )

---

**تمرین :**

30 . اگر یك موتر هنگام برك گرفتن به فاصله 70ft خط سیاه را بالای سرك گذاشته باشد. دریافت کنید که سرعت رفتار موتر قبل از برك گرفتن چند میل فی ساعت بود ؟

## از بین بردن جذر از صورت یا مخرج کسر:

هنگامیکه مخرج یك کسر ، یك حد زیر جذر داشته باشد ، معمولاً مخرج را به ترتیبی از جذر خارج میکنیم ، که صورت و مخرج کسر را به مخرج کسر ضرب نمائیم .

مثال :

27. $$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{35}}{5}$$

28. $$\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{5b}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{5b}} \times \frac{\sqrt{5b}}{\sqrt{5b}} = \frac{\sqrt{10ab}}{5b}$$

29. $$\frac{\sqrt[3]{54x^3}}{\sqrt[3]{4y^5}} = \sqrt[3]{\frac{54x^3}{4y^5} \times \frac{2y}{2y}} = \frac{\sqrt[3]{27x^3 \times 4y}}{\sqrt[3]{8y^6}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{27x^3} \times \sqrt[3]{4y}}{\sqrt[3]{8y^6}} = \frac{3x \times \sqrt[3]{4y}}{2y^2}$$

هر گاه مخرج کسر دو حد داشته باشد ، صورت و مخرج کسر را به مزدوج مخرج ضرب مینمائیم که با این عمل مخرج کسر به شکل ( ناطق ـ قابل فهم ) تبدیل میشود .

مثال :

30. $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

---

یك قوس مزدوج قوس دیگر است ..... $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

در اینجا مخرج ها را ناطق بسازید . فرض کنید که حروف اعداد تام ، و مثبت را نشان میدهد .

$$31. \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$$

در اینجا صورت کسر ها را ناطق سازید . فرض کنید که تمام حروف ، اعداد ، تام و مثبت باشند .

$$32. \quad \frac{1-\sqrt{2}}{5} = \frac{1-\sqrt{2}}{5} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{5(1+\sqrt{2})}$$

$$\frac{1-2}{5+5\sqrt{2}} = \frac{-1}{5+5\sqrt{2}}$$

$$33. \quad \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

مخرج کسر را ناطق سازید :

---

تمرین :

$$31. \quad \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \qquad 32. \quad \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$$

صورت کسر را ناطق سازید :

33. $\dfrac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a}}{2}$

34. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$

---

**تمرین 8-1 :**

معلوم کنید ، که اعداد ارائه شده در افاده های ذیل جانشین جایز اند یا خیر ؟

i

1. $\sqrt{x-3} : -2 \quad , \quad 5$

2. $\sqrt{2x-5} : 3 \quad , \quad 2$

3. $\sqrt{3-4x} : -1 \quad , \quad 1$

4. $\sqrt{x^2+3} : 0 \quad , \quad 4.3$

5. $\sqrt{1-x^2} : 1 \quad , \quad 3$

6. $\sqrt{x^2+2x+1} : -3 , 4$

7. $\sqrt{2x+7} : -4 , \quad 5$

8. $\sqrt{3-5x} : 1 \quad , \quad 2$

سا ده سازید :

ii

9. $\sqrt{(-11)^2}$

10. $\sqrt{(-1)^2}$

11. $\sqrt{16x^2}$

12. $\sqrt{36t^2}$

13. $\sqrt{(b+1)^2}$

14. $\sqrt{(2c-3)^2}$

15. $\sqrt[3]{-27x^3}$

16. $\sqrt[3]{-8y^3}$

17 $\sqrt{x^2-4x+4}$

18. $\sqrt{y^2+16y+64}$

19. $\sqrt[5]{32}$

20. $\sqrt[5]{-32}$

21. $\sqrt{180}$

22. $\sqrt{48}$

23. $\sqrt[3]{54}$

24. $\sqrt[3]{135}$

25. $\sqrt{128c^2d^{-4}}$

26. $\sqrt{162c^4d^{-6}}$

27. $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$

28. $\sqrt{6}\times\sqrt{8}$

افاده های ذیل را ساده سازید ، فرض کنید تمام حروف اعداد تام و مثبت باشند و همچنان تمام جذور نیز مثبت باشند .

29. $\sqrt{2x^3y}\sqrt{12xy}$

30. $\sqrt{3y^4z}\sqrt{20z}$

31. $\sqrt[3]{3x^2y}\sqrt[3]{36x}$

32. $\sqrt[5]{8x^3y^4}\sqrt[5]{4x^4y}$

33. $\sqrt[3]{2(x+4)}\sqrt[3]{4(x+4)^4}$

34. $\sqrt[3]{4(x+1)^2}\cdot\overline{18(x+1)^2}$

35. $\dfrac{\sqrt{21ab^2}}{\sqrt{3ab}}$

36. $\dfrac{\sqrt{128ab^2}}{\sqrt{16a^2b}}$

37. $\dfrac{\sqrt[3]{40m}}{\sqrt[3]{5m}}$

38. $\dfrac{\sqrt{40xy}}{\sqrt{8x}}$

39. $\dfrac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{24x^5}}$

40. $\dfrac{\sqrt[3]{40xy^3}}{\sqrt[3]{8x}}$

41. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a-b}}$

42. $\dfrac{\sqrt{x^3-y^3}}{\sqrt{x-y}}$

43. $\sqrt{\dfrac{9a^2}{8b}}$

44. $\sqrt{\dfrac{5b^2}{12a}}$

میشود، در حالیکه $-x$ ممکن است : مثبت باشد، یا منفی باشد ، و یا ممکن است صفر باشد. این همه مربوط به قیمت x است . سیمبول ( − ) که دراینجا بکار رفته (عکس جمعی) را نشان میدهد. و همچنان افادهء $3-x$ عملیه منفی را نشان میدهد ، در حالیکه این عملیهء منفی نیست بلکه در حقیقت .......... $3+(-x)$ است . .

## احتیاط:

علامه منفی در جلو یك عدد یا افاده،به مفهوم عکس جمعی تلقی میشود.

مانند: $-x$ ، یا $-(x^2+3x-2)$ ، میدانیم که این افاده ممکن مثبت یا منفی ویا صفر شود و مربوط است به قیمت x .

مثالها : عکس جمعی را در یافت کنید .

10. عکس 5 ، منفی 5 است ........ $-(5)=-5$ اگر باشد $x=5$ , $-x=?$ , $-x=$

11. عکس منفی 3 ، خود 3 است ، $-(-3)=+3$ اگرباشد $x=-3$ , $-x=?$ , $-x=$

12. عکس صفر خود صفر است $-(0)=0$ اگرباشد $x=0$ , $-x=?$ , $-x=?$

اگر باشد $x=1 \Longrightarrow -(x^2+4x+2)=-(1^2+4\times1+2)=-(7)=-7$ ,

و اگر $X=-1$ ، $-(x^2+4x+2)=-[(-1)^2+4(-1)+2]=-(-1)=1$

$-(-x)=x\ ,\ (-1)(x)=-x$

$-1\times x=-x\ ,\ -(-x)=x$

$(-)(+)=-\ ,\ (-)(-)=+$

برای هر قیمت x رابطه های ذیل صدق میکند:

$-(-x)=x\ ,\ -1\times x=-x$ هر عددیکه به $(-1)$ ضرب شود عکس منفی آن

45. $\sqrt[3]{\frac{2x^2 2y^3}{25}}$

46. $\sqrt[3]{\frac{24x^3y}{3y^4}}$

47. $\frac{(\sqrt[3]{32x^4y})^2}{(\sqrt[3]{xy})^2}$

48. $\frac{(\sqrt[3]{16x^2y})^2}{(\sqrt[3]{xy})^2}$

49. $\frac{3\sqrt{a^2b^2}\sqrt{4xy}}{2\sqrt{a^{-1}b^{-2}}\sqrt{9x^{-3}y^{-1}}}$

50. $\frac{4\sqrt{xy^2}\sqrt{9xb}}{3\sqrt{x^{-1}y^{-2}}\sqrt{16a^{-5}b^{-1}}}$

51. $8X\sqrt{2} - 6\sqrt{20} - 5\sqrt{8}$

52. $\sqrt{12} + \sqrt{75}$

53. $2\sqrt[3]{8x^2} + 5\sqrt[3]{27x^2} - 3\sqrt[3]{x^3}$

54. $5a\sqrt{(a+b)^3} - 2a^{1}\sqrt{a+b} - 3b\sqrt{(a+b)^3}$

55. $3\sqrt{3y^2} - \frac{y\sqrt{48}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{12}{4y^{-2}}}$

56. $\sqrt[3]{x^5} - \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^{-1}}} + \sqrt[3]{\frac{8}{x^{-5}}}$

57. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

58. $(\sqrt{8} + 2\sqrt{5})(\sqrt{8} - 2\sqrt{5})$

59. $(\sqrt{t} - x)^2$

60. $(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}})^2$

61. $5\sqrt{7} + \frac{35}{\sqrt{7}}$

62. $(\sqrt{a^2b} + 3\sqrt{y})(2a\sqrt{b} - \sqrt{y})$

63. $(\sqrt{x+3} - \sqrt{3})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})$

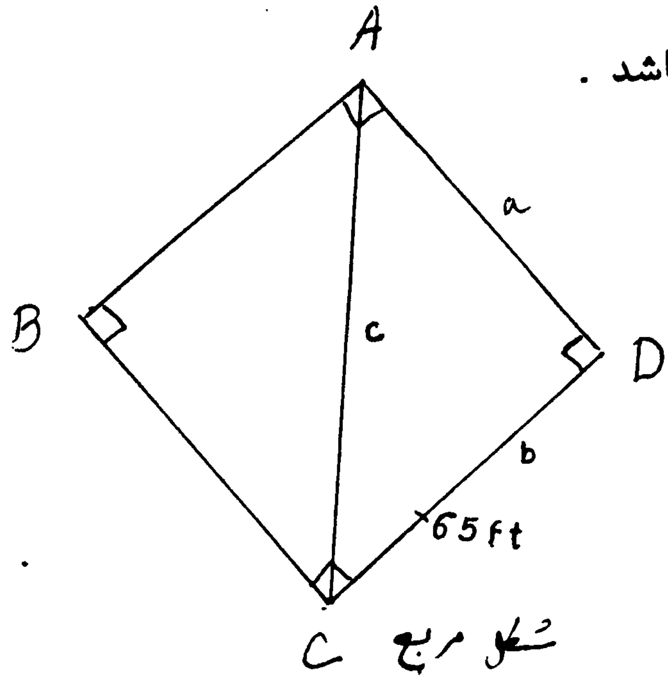
64. $(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$

65. $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ شکل (III-1) ....... فرمول ( رقاصه ) --->

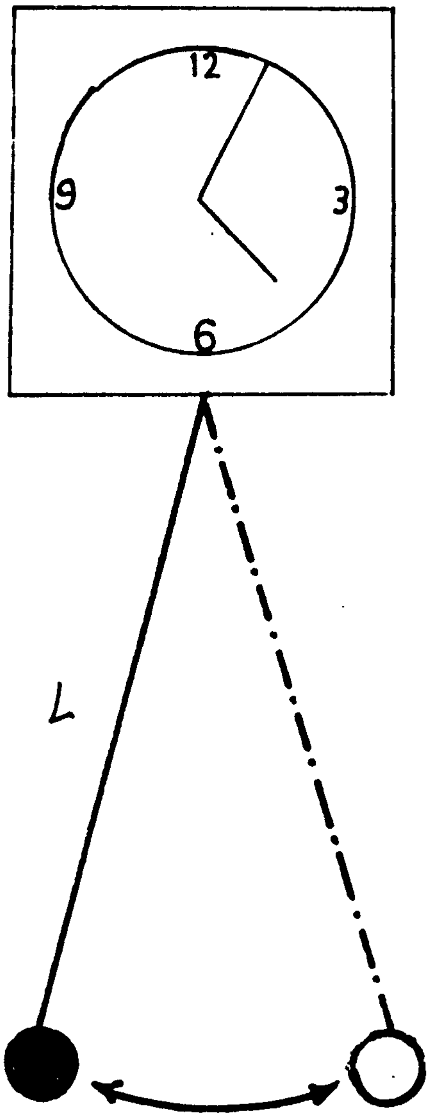
T پیریود (وقت) به ثانیه ، L طول تار رقاصه به فت ($g = 32\ ft/sec^2$)

مثال : پیریود رقاصه را در صورتی در یافت کنید که طول L ، 2 فت ، 64 فت.

و 100 فت باشد .




شکل مربع




شکل (۱۱۱-۱) رقاصه

66. $C=\sqrt{a^2+b^2}$ , $AC = ?$ . . . . . . (در شکل مربع)

در اینجا مخرج ها را ناطق میسازید . فرض کنید که حروف ، اعداد مثبت را نمایندگی میکند . و همچنان اعداد زیر جذر نیز مثبت میباشند .

67. $\dfrac{6}{3+\sqrt{5}}$

68. $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

69. $\sqrt[3]{\dfrac{16}{9}}$

70. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{6}}$

71. $\dfrac{4\sqrt{x}-3\sqrt{xy}}{2\sqrt{x}+5\sqrt{y}}$

72. $\dfrac{5\sqrt{x}+2\sqrt{xy}}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$

صورت های کسور را ناطق بسازید :

73. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5a}}{6}$

74. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5y}}{4}$

75. $\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$

76. $\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}$

77. $\dfrac{\sqrt{a+3}-\sqrt{3}}{3}$

78. $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

فرض کنید تمام حروف اعداد مثبت باشند :

79. $\sqrt{8.2x^3y}\sqrt{12.5xy}$

80. $\sqrt{0.012y^4z}\sqrt{1.305z}$

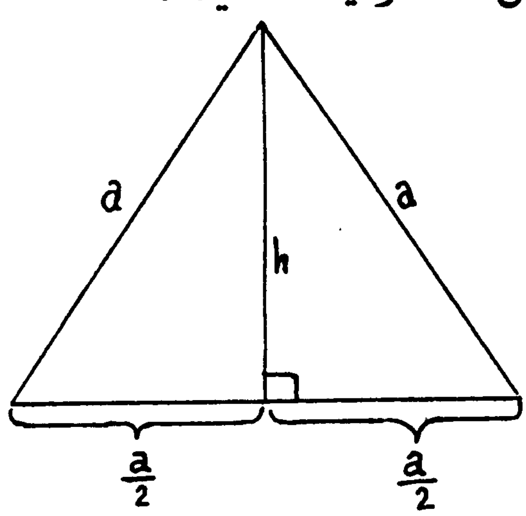
81. $\sqrt{\dfrac{6.03a^2}{17.13b}}$

82. $\sqrt{\dfrac{3.2b^2}{82.1a}}$

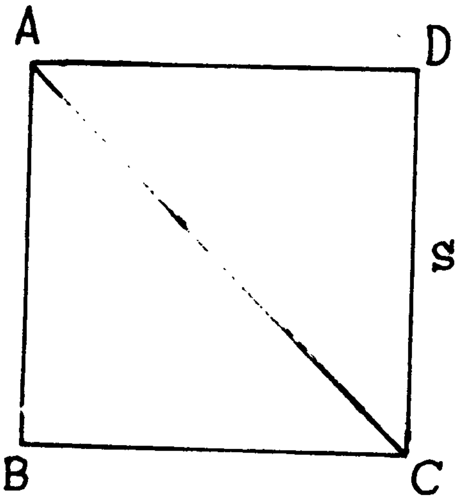
83 ـ یك مثلث متساوی الاضلاع در ذیل نشان داده شده .

h را از جنس a در یافت کنید .

84. در شکل ذیل ، فارمول مساحت مثلث را از جنس a در یافت کنید .



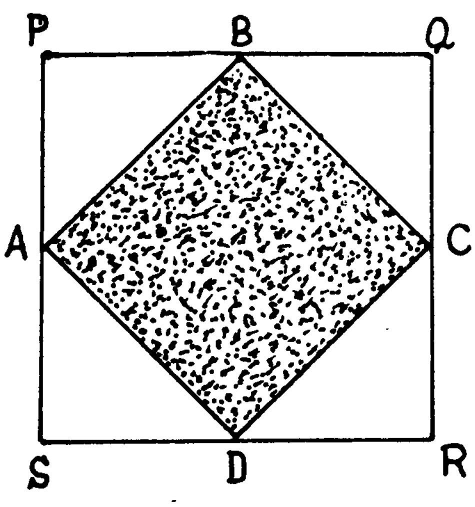
85. شکل ABCD یك مربع است قطر AC را معلوم کنید .




86. در یك مثلث متساوی الساقین قایم الزاویه ، اضلاع مساوی آن s میباشند . فورمول را پیدا کنید که از آن ضلع سوم را معلوم کرده بتوانیم .

87. قطر یك مربع ، $8\sqrt{2}$ است . ضلع آن را معلوم کنید ؟

88. مساحت شکل مربع PQRS ، 100 فت مربع است ، نقاط D,C,B,A نقاط وسط اضلاع میباشند . مساحت شکل مربع ABCD را معلوم کنید ؟




ساده سازید :

89. $\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

90. $\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

91. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ثبوت کنید :

92. $(\sqrt{5+\sqrt{24}})^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ ? نشان بدهید . که این ها باهم مساوی اند .

93. $|a^n|=|a|^n$ برای کدام رقم n رابطه صحیح است .

94. $|x+y|=|x|+|y|$? برای کدام قیمت های x و y رابطه صحیح است .

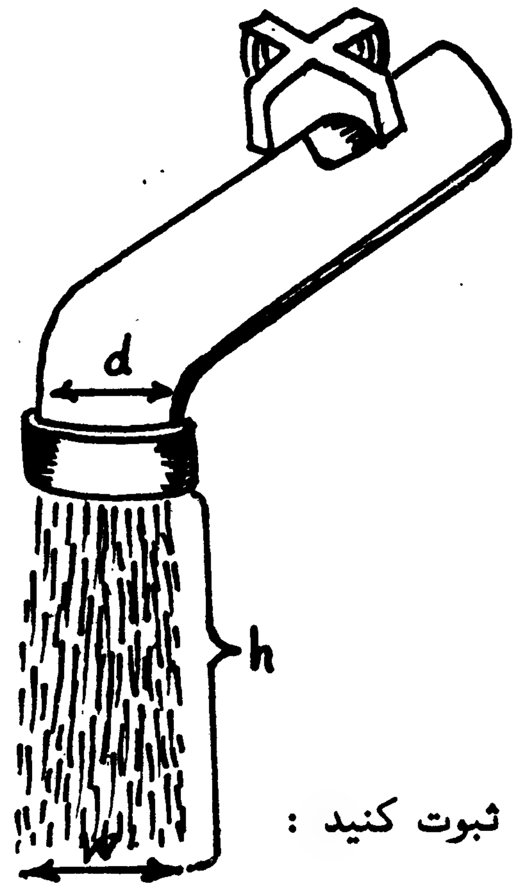
95. $$w=d\sqrt{\frac{V_0}{\sqrt{V_0^2+19.6h}}}$$

d <== قطر شیر دهن 0.03m

$v_0$ <== سرعت آب 0.6m/sec

w <== عرض ستون آب؟

h <== ارتفاع آب از شیر دهن تا زمین 0.1m




ثبوت کنید :

برای هر عدد حقیقی مثبت a و b اعداد مثبت d و c موجود اند که رابطه ذیل را نوشته میتوانیم :

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}$$

تحت کدام شرایط b = d , a = c میشود .

---

# ۹_۱ توان های ناطق

**اهداف :** با تکمیل کردن این مبحث شما قادر خواهید بود که :

- توان را به جذر تبدیل نمائید .
- جذر را به توان تبدیل کنید .
- افاده های جذر دار را ساده سازید .

---

حال ما در موقفی هستیم که توان های کسری را با استفادهء از قوانین قبلی ( توان های اعداد تام ) ساده سازیم .

مثلاً :

$$a^{1/2} \times a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^{1} = a$$

$$(a^{1/n})^{m} = (a^{m})^{1/n} = a^{m/n}$$

**تعریف :**

عدد a ، را در صورتیکه a مثبت باشد و n , m اعداد طبیعی باشند باین شکل در آورده میتوانیم .

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^{m} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

و همچنان :

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$$

## تبدیل کردن به حالت جذر :

به حالت جذر تبدیل نموده بعداً در صورت امکان ساده سازید :

مثالها :

1. $m^{2/3} = \sqrt[3]{m^{2}}$

2. $t^{-1/2} = \frac{1}{t^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$

3. $64^{5/2} = (64^{1/2})^5 = (\sqrt{64})^5 = 8^5 = 32,678$

4. $16^{-3/4} = \frac{1}{16^{3/4}} = \frac{1}{(16^{1/4})^3} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

---

تمرین :

به جذر تبدیل نمائید :

1. $n^{3/2}$

2. $y^{-6/7}$

3. $32^{4/5}$

4. $64^{-2/3}$

---

مثالها :

به حالت توان دار تبدیل نمائید و ساده سازید .

5. $(\sqrt[4]{7xy})^5 \quad (7xy)^{5/4}$

6. $\sqrt[3]{8^4} = 8^{4/3} = (8^{1/3})^4 = 2^4 = 16$

7. $\sqrt[6]{x^3} = x^{3/6} = x^{1/2}$ یا $(\sqrt{x})$

8. $\sqrt[6]{4} = 4^{1/6} = (4^{1/2})^{1/3} = 2^{1/3}$ ( یا $\sqrt[3]{2}$ )

9. $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3]{7^{1/2}} = (7^{1/2})^{1/3} = 7^{1/6}$ ( یا $\sqrt[6]{7}$ )

10. $\sqrt{6}\sqrt[3]{6} = 6^{1/2} X 6^{1/3} = 6^{\frac{3+2}{6}} = 6^{5/6}$ ( یا $\sqrt[6]{6}^5$ )

---

تمرین ها :

به حالت توان دار تبدیل کرده بعداً ساده نمائید .

5. $\sqrt[3]{(5ab)^4}$

6. $\sqrt[4]{16^3}$

7. $\sqrt[6]{a^4}$

8. $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

9. $\sqrt{5^3\sqrt[3]{5}}$

مثالها : حد های دارای توان ناطق را ساده سازید .

11. $x^{5/6} \times x^{2/3} = x^{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}} = x^{9/6} = x^{3/2} = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$

12. $(a^5)^{-2/3} = a^{-10/3} = \dfrac{1}{a^{10/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{10}}} = \dfrac{1}{a^3 \times \sqrt[3]{a}}$

13. $(5^{1/3} - 5^{-5/3}) \times 5^{1/3} = 5^{1/3} \times 5^{1/3} - 5^{-5/3} \times 5^{1/3} = 5^{2/3} - 5^{-4/3} = \sqrt[3]{5^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^4}}$

$= \sqrt[3]{25} - \dfrac{1}{5\sqrt[3]{5}}$

---

تمرین

ساده سازید و بعداً به حالت جذر بنویسید :

10. $a^{3/4} \times a^{1/2}$

11. $(x^{-3})^{2/5}$

12. $(2^{1/4} + 2^{-3/4}) \times 2^{1/2}$

---

## نوشتن یک جذر :

بعضی افاده ها که دارای جذر بوده ، یا توان کسری داشته باشند . این امکان موجود است که آنرا ساده سازید ، تا یک جذر از آن بدست آید .

این افاده ها را طوری بنویسید که تحت یک جذر بیایند .

مثالها:

14. $a^{1/2} b^{-1/2} c^{5/6} = a^{3/6} b^{-3/6} c^{5/6} = (a^3 b^{-3} c^5)^{1/6} = \sqrt[6]{a^3 b^{-3} c^5}$

15. $\dfrac{a^{1/4} b^{3/8}}{a^{1/2} b^{1/8}} = a^{-1/4} b^{1/4} = (a^{-1} b)^{1/4} = \sqrt[4]{a^{-1} b}$

16. $\sqrt[4]{7}\sqrt{3}=7^{\frac{1}{4}} X 3^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{4}} X 3^{\frac{2}{4}}=(7 X 3^{2})^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{63}$

17. $\dfrac{\sqrt[4]{(x+2)^{3}}\sqrt[5]{x+2}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{(x+2)^{\frac{3}{4}}(x+2)^{\frac{1}{5}}}{(x+2)^{\frac{1}{2}}}=(x+2)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}=(x+2)^{\frac{9}{20}}$

$=\sqrt[20]{(x+2)^{9}}$

---

**تمرین**

افاده های ذیل را تحت یك جذر ( $\sqrt{\ }$) در آورید .

13. $\sqrt[3]{5} X \sqrt{2}$

14. $x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{5}{6}}$

15. $\dfrac{\sqrt[4]{(x+y)^{3}}}{\sqrt{x+y}}$

---

**تمرین 9-1:**

به حالت جذری تبدیل نموده و ساده نمائید .

1. $x^{\frac{3}{4}}$

2. $y^{\frac{2}{5}}$

3. $16^{\frac{3}{4}}$

4. $4^{\frac{7}{2}}$

5. $125^{-\frac{1}{3}}$

6. $32^{-\frac{4}{5}}$

7. $a^{\frac{5}{4}} b^{-\frac{3}{4}}$

8. $x^{\frac{2}{5}} y^{-\frac{1}{5}}$

به حالت توان دار تبدیل کرده و ساده نمائید .

9. $\sqrt[3]{20^{2}}$

10. $\sqrt[5]{17^{3}}$

11. $(\sqrt[4]{13})^{5}$

12. $(\sqrt[5]{12})^{4}$

13. $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$

14. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$

15. $\sqrt{5\sqrt[3]{5}}$

16. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$

17. $\sqrt[5]{32^2}$

18. $\sqrt[3]{64^{-2}}$

19. $\sqrt[3]{8y^6}$

20. $\sqrt[5]{32c^{10}d^{15}}$

21. $\sqrt[3]{a^2+b^2}$

22. $\sqrt[4]{a^3-b^3}$

23. $\sqrt[3]{27a^3b^9}$

24. $\sqrt[4]{81x^8y^8}$

25. $\sqrt[6]{\frac{m^{12}n^{24}}{64}}$

26. $\sqrt[8]{\frac{m^{16}n^{24}}{2^8}}$

ساده سازید و بعداً به حالت جذری در آورید تا وقتیکه دیگر انکشاف مناسب نباشد .

27. $(2a^{3/2})(4a^{1/2})$

28. $(3a^{5/6})(8a^{2/3})$

29. $\left(\frac{x^6}{9b^{-4}}\right)^{-1/2}$

30. $\left(\frac{x^{2/3}}{4y^{-2}}\right)^{-1/2}$

31. $\frac{x^{2/3}y^{5/6}}{x^{-1/3}y^{1/2}}$

32. $\frac{a^{1/2}b^{5/8}}{a^{1/4}b^{3/8}}$

این افاده ها را تحت یك جذر در آورید و بعداً ساده سازید .

33. $\sqrt{6}\sqrt{2}$

34. $\sqrt{2}\sqrt[4]{8}$

35. $\sqrt[4]{xy}\sqrt[3]{x^2y}$

36. $\sqrt[3]{ab^2}\sqrt{ab}$

37. $\sqrt[3]{a^4}\sqrt{a^3}$

38. $\sqrt{a^3}\sqrt[3]{a^2}$

عدد بدست می آید . که این موضوع در قضیه اول بیشتر تحلیل شده است .

## قضیه اول :

برای هر قیمت عدد حقیقی x صدق میکند که :

$$-(-x)=x \quad \text{و} \quad -1 \times x=-x$$

( ضرب کردن یك عدد به ( 1 − ) ، عکس جمعی را تولید میکند . و همچنان عکس جمعی ، یك عکس جمعیء عبارت از خود همان عدد است ) . به مفکورهء عکس جمعی ، میتوانیم که برای عدد مطلقه یك تعریف بسیار اساسی بدست بیاوریم . قیمت مطلقه عدد غیر منفی خود همان عدد است و همچنان قیمت مطلقه یك عددمنفی عبارت از عدد عکس جمعی همان عدد است .

تعریف :

برای هر عدد حقیقی x ، صدق میکند که :

$|x|=x$........... ، $x>0$ اگر

و اگر $x<0$ ، ....$|x|=-x$

این تعریف را به وجه بهتر میتوان چنین تشریح نمائیم :

قیمت مطلقه عدد x ، عبارت است از :

الف) خود عدد x ، اگر x منفی نباشد.

ب) عکس جمعی x ، اگر x منفی باشد .

$-x$ در حقیقت ، عکس جمعی عدد x است .

39. $\dfrac{\sqrt{(a+x)^3\sqrt[3]{(a+x)^2}}}{\sqrt[4]{a+x}}$

40. $\dfrac{\sqrt[4]{(x+y)^2\sqrt[3]{(x+y)}}}{\sqrt{(x+y)^3}}$

توسط کلکولیتر حل نمائید .

41. $(\sqrt[4]{13})^5$

42. $\sqrt[4]{17^3}$

43. $12.3^{3/2}$

44. $1.345^{5/2}$

45. $105.6^{3/4}$

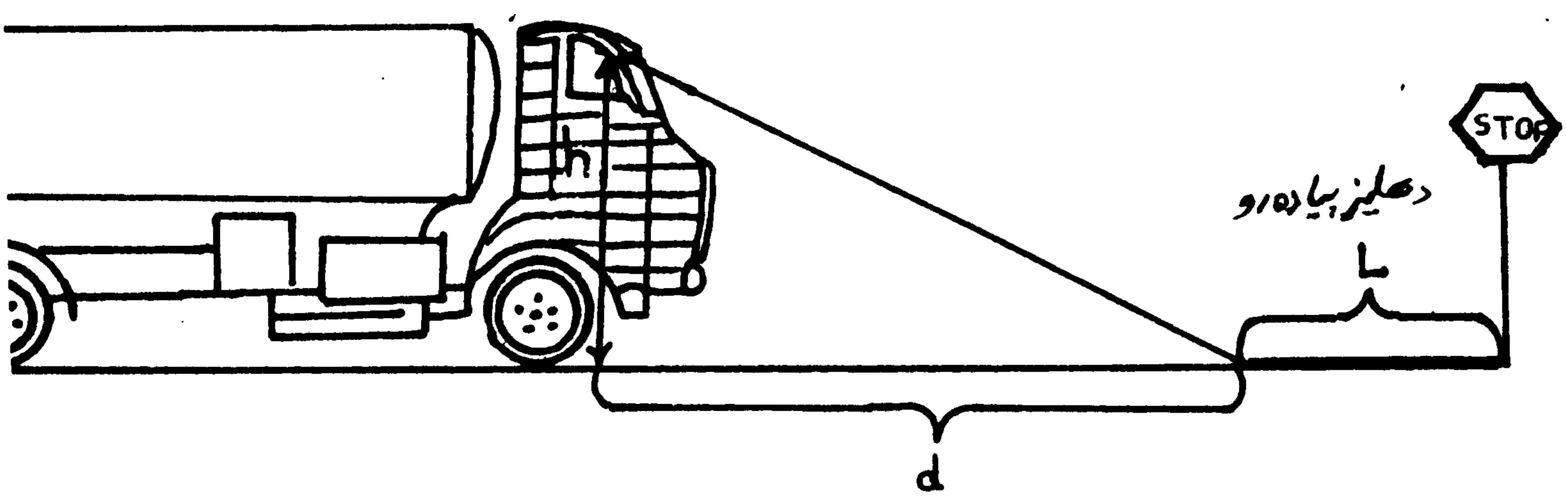
46. $7.14^{5/4}$

مطالعات روان شناسی نشان میدهد که ، علامه های پیاده رو را وقتی یك دریور خوبتر خوانده میتواند که طول حروف آن با فارمول ذیل تعین شود .

$$L = \frac{0.000169d^{2.27}}{h}$$

تماماً واحد ها به فت میباشند .

d فاصله از موتر تا به آنجا که حروف پیاده رو درج شده ، h ارتفاع چشم دریور از سرك L را دریافت کنید وقتیکه d و h داده شده باشند .




47. $h = 4ft, d = 180ft$

48. $h = 4ft , d = 100ft$

49. $h = 4ft, d = 200ft$

50. $h = ft , d = 300ft$

ساده نمائید :

51. $\left(\sqrt{a^{\sqrt{a}}}\right)^{\sqrt{a}}$

52. $\left(2a^{3}\, b^{5/4}\, c^{1/7}\right)^{4} \div \left(54a^{-2}\, b^{2/3}\, c^{4/5}\right)^{-1/3}$

مطابق مطالعات روان شناسی صنعتی ، در اکثر حالات کارکردن هر قدر که یك کار زیاد دفعه اجرا گردد ، ( تمرین شود ) ، بعداً تکمیل همان کار وقت کمتر را در بر میگیرد . درین مورد ، رابطه ذیل بدست آمده است .

$$T = 34x^{-0.41}$$

T تعداد ساعات کار است که برای x ام واحد که تولید میگردد ، ضرورت است . T را در یافت کنید ، اگر x مساوی به 1 , 6 , 8 , 10 , 32 و 64 باشند . (ذریعه کلکولیتر)

---

# خلاصه و تکرار فصل اول

جواب (۳۱۴م).

صفحات ذیل ، شامل مطالبی میباشند که شما بعد از ختم فصل اول به اجرا آن قادر میباشید.

تمرین های تکراری برای پرکتس شما است ، جواب آنها در کتاب درج است . اگر کدام تمرین را غلط میکنید دوباره به موضوع رجعت نموده همان موضوع را دوباره مطالعه نمائید .

در ذیل اعداد نشان داده شده اند :

$$-43.89\ ,\ 12\ ,\ -3\ ,\ -\frac{1}{5}\ ,\ \sqrt{7}\ ,\ \sqrt{10}\ ,\ -1\ ,\ -\frac{4}{3}\ ,\ 7\frac{2}{3}\ ,\ -19\ ,\ 31\ ,\ 0$$

1. کدام اعداد تام اند .
2. کدام اعداد طبیعی اند .
3. کدام اعداد ناطق اند .
4. کدام اعداد حقیقی اند .
5. کدام اعداد غیر ناطق اند .
6. کدام اعداد مکمل اند .

محاسبه نمائید :

7. $15+(-19)$
8. $-12+/-4/$
9. $-2.5+(-2.5)$
10. $22-(-8)$
11. $\frac{18}{-3}$
12. $(-17)(-9)$

13. $-10(20)(-5)(-3)$

14. $-\frac{15}{16}+\frac{3}{4}$

15. $\frac{5}{12}-\{-\frac{7}{8}\}$

به اعشاری تبدیل کنید :

16. $3.261 \times 10^{6}$

17. $4.1 \times 10^{-4}$

به نوشته های ساینسی تبدیل نمائید :

18. 0.01432

19. 43,210

ساده نمائید .

20. $(7a^{2}b^{4})(-2a^{-4}b^{3})$

21. $\frac{54x^{6}y^{-4}z^{2}}{9x^{-3}y^{2}z^{-4}}$

22. $\sqrt[4]{81}$

23. $\sqrt[5]{-32}$

24. $\frac{b-a^{-1}}{a-b^{-1}}$

25. $\frac{(x^{2}/y)+(y^{2}/x)}{y^{2}-xy+x^{2}}$

26. $(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})$

27. $(5x^{2}-\sqrt{2})^{2}$

28. $8\sqrt{5}+\frac{25}{\sqrt{5}}$

29. $(x+t)(x^{2}-xt+t^{2})$

30. $(5a+4b)^{3}$

31. $(5xy^{4}-7xy^{2}+4x^{2}-3)-(-3xy^{4}+2xy^{2}-2y+4)$

حد ششم را در یافت کنید :

32. $(a+b)^{7}$

انکشاف بدهید :

33. $(x-2y)^4$

فیکتور نمائید :

34. $x^3+2x^2-3x-6$

35. $12a^3-27ab^4$

36. $24x+144+x^2$

37. $9x^3+35x^2-4x$

38. $8x^3-1$

39. $27x^6+125y^6$

40. $\sqrt{y^5\sqrt[3]{y^2}}$

41. $\dfrac{\sqrt{(a+b)^3\sqrt[3]{a+b}}}{\sqrt[6]{(a+b)^7}}$

به جذر تبدیل کنید

42. $b^{7/5}$

به قسم توان تبدیل کرده ساده کنید .

43. $\sqrt[8]{\dfrac{m^{32}n^{16}}{3^8}}$

تقسیم و ساده کنید .

44. $\dfrac{3x^2-12}{x^2+4x+4} \div \dfrac{x-2}{x+2}$

تفریق و ساده نمائید .

45. $\dfrac{x}{x^2+9x+20} - \dfrac{4}{x^2+7x+12}$

مخرج را ناطق سازید :

46. $$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

مشخصه های رابطه های ذیل را واضح نمائید :

47. $t + (-t) = 0$

48. $8(a+b) = 8a + 8b$

49. $-3(ab) = (-3a)b$

50. $tx + xt$

ضرب کنید . فرض نمائید که تمام توان ها اعداد تام اند:

51. $(x^{n} + 10)(x^{n} - 4)$

52. $(t^{a} + t^{-a})^{2}$

53. $(y^{b} - z^{c})(y^{b} + z^{c})$

54. $(a^{n} - b^{m})^{3}$

فیکتور کنید :

55. $y^{2n} + 16y^{n} + 64$

56. $x^{2t} - 3x^{t} - 28$

57. $m^{6n} - m^{3n}$

ساده کنید :

58. $$\frac{(2^{n+1}x^{n+1})/(n+1)^{5}}{(2^{n}x^{n})/(n)^{5}}$$

59. $$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 3} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 3 \times 4}$$

# فصل دوم

## معادله وغیر مساوات :

اهداف : شما قادر خواهید شد که معادلات ساده را با استفاده از قواعد جمع ، ضرب ، " قانون حاصل ضرب صفر " حل کنید .

---

### تعریف اول

### ۱ـ۲ حل معادلات و غیر مساوات

الف : حل و سیت های حل :

تعریف : حل یك معادله عبارت است از بدست آوردن عدد ویا اعدادیکه اگر به عوض متحول در معادله حل شده وضع گردد معادله مذکور را تکافو نماید .

مثال : عدد 3 حل معادله ، $5x = 15$ میباشد ، زیرا اگر عدد 3 با متحول ( x ) درین معادله تعویض گردد ، هر دو طرف معادله مساوی میشود .

لذا عدد ( 3 ) حل این معادله میباشد . هر گاه عوض x درین معادله عدد ( 4 ) گذاشته شود معادله برهم میخورد ، لذا عدد ( 4 ) حل معادله نمیباشد .

### تعریف دوم :

تمام حل های یك معادله بنام سیت حل یاد میگردند .

مثال : در معادله " $y^2 - y =$ " اگر متحول y را با دوقیمت 0 ، و 1 تعویض نماییم : معادله تحقق میابد . لذا حل معادله مذکور عبارت است از سیت $\{0,1\}$ .

تمرین :

حل معادلات را طور شفاهی پیدا کنید .

1. $x - 2 = 7$

2. $y^2 + y = 0$

---

## طرق حل ـ معادله :

طریقه ، جمع و ضرب :

( الف ) طریقۀ جمع :

برای اعداد حقیقی a ، b و c اگر این مساوات $a = b$ بر قرار باشد ، پس ، ( $a + c = b + c$ ) نیز صحیح میباشد .

باید متذکر شد که قاعده فوق ، در مورد تفریق کردن عین عدد از هر دو طرف مساوات معادله ، و تقسیم هر دو طرف معادله به عین عدد نیز صدق میکند .

مثال اول $3x + 4 = 15$ حل کنید :

$$3x + 4 = 15$$

$$3x + 4 + (-4) = 15 + (-4)$$

$$3x = 11$$

$$\frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 11$$

$$x = \frac{11}{3}$$

امتحان معادله :

$$3x + 4 = 15$$

| $3 \times 11/3 + 4$ | 15 |
|---|---|
| $11 + 4$ | |
| 15 | |

سیت حل معادله با سمبول { 11 / 3 } ———— نشان داده میشود . یا مختصراً

سیت حل معادله است . $(11/3)$ .

مثال دوم :

$3(7-2x)=14-8(x-1)$ ، حل نمائید ؟

امتحان معادله :

$3(7-2x)=14-8(x-1)$

$3(7-2\times 1/2) = 14-8(1/2-1)$

| | |
|---|---|
| $3(7-1)$ | $14-8(-1/2)$ |
| $3\times 6$ | $14+4$ |
| $18$ | $18$ |

جواب صحیح است

حل :

$3(7-2x)=14-8(x-1)$

$21-6x=14-8x+8$

$8x-6x=22-21$

$2x=1$

$$x=\frac{1}{2}$$

حل معادله مذکور عبارت است از : $x=\frac{1}{2}$

مثال سوم : $x+3=x$ حل نمائید :

$-x+x+3=-x+x$

$3=0$

این معادله حل ندارد، لذا ، معادله غلط است .

---

تمرین :

حل نمائید :

3. $9x-4=8$

4. $-4x+2+5x=3x-15$

5. $3(y-1)-1=2-5(y+5)$

6. $x-7=x$

7. $2x+6=2x-4$

---

## قاعدهٔ حاصل ضرب صفر :

قاعدهٔ سوم حل معادله بنام « قاعده حاصل ضرب صفر » یاد میشود و ذیلا تشریح میگردد :

قاعده حاصل ضرب صفر :

برای اعداد حقیقی a و b ، اگر $ab=0$ باشد ، پس $b=0, a=0$ میباشد .

به عباره دیگر اگر $a=0$ یا $b=0$ باشد پس $ab=0$ میشود .

وقتیکه یك معادله را به طریقه فوق حل می نمائیم ، باید عدد صفر به یك طرف معادله و حاصل ضرب ( فیکتور ) به طرف دیگر معادله باشد . بعداً حل معادله از طریق فیکتورینگ که مساوی به صفر قرار داده میشود ، صورت میگیرد .

مثال چارم : این معادله را حل نمائید :

$x^2+x-12=0$

$x^2+x-12=0$

(1) معادله را فیکتور نمائید ................................ $(x+4)(x-3)=0$

(2) هر قوس را جداگانه مساوی به صفر قرار بدهید.... $(x+4)=0$ یا ---> $(x-3)=0$

$x=-4$ یا ---> $x=3$

جواب - - - $\{-4, 3\}$

# عملیه ء ضرب الجبری

۱ـ وقتیکه دو عدد منفی را با هم ضرب می نماییم . قیمت های مطلقه آنها را باهم ضرب میکنیم و علامه نتیجه آن مثبت میشود .

۲ـ وقتیکه عدد مثبت را با عدد منفی ضرب می نماییم . قیمت های مطلقه آنها را با هم ضرب کرده و علامه نتیجه آن منفی میشود.

مثالها: سوالات ذیل را ضرب نمایید.

14) $3(-4)=-12$

15) $1.5(-3.8)=-5.7$

16) $-5(-4)=20$

17) $-2/3(-4/5)=8/15$

18) $-3(-2)(-4)=-24$

## مشخصات اعداد حقیقی در ضرب را چنین خلاصه مینماییم :

۱ـ تغیر و تبدیل جای (Commutativity) :

برای اعداد حقیقی a، و b چنین صدق میکند که :

$ab=ba$ ..... است .

به هر ترتیب که اعداد با هم ضرب شوند. نتیجه را تغیر نمیدهند .

۲ـ برای اعداد حقیقی a ، b ، و c ، گروپ بندی ذیل جائز است :

$$a(bc)=(ab)c$$

مثال پنجم :

این معادله را حل نمائید :

$$2x^3 - x^2 = 3x\,.$$

تمرین :

از 8 - 13 حل کنید :

8. $(x-7)(2x+3)=0$

9. $x^2 - x = 20$

10. $x^2 = 5x$

11. $2x^2 + 10x + 1 = 0$

12. $3x^3 - 11x^2 = 4x$

13. $5x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$

[ کمك : $x^2(5x+1) - 1\,(5x+1) = 0$ ]

حل :

$$2x^3 - x^2 = 3x$$

$$2x^3 - x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x^2 - x - 3) = 0$$

$$x(2x-3)(x+1) = 0$$

$x = 0$      $2x - 3 = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$      $x_2 = \dfrac{3}{2}$

$x + 1 = 0$

$x_3 = -1$

جواب ( سیت حل ) ⟵ $\{0, \dfrac{3}{2}, -1\}$

## ( ب ) حل غیر مساوات :

قواعد حل غیر مساوات مشابه قواعد حل معادله میباشند . ما میتوانیم عین عدد را به هر دو طرف غیر مساوات جمع نمائیم . همچنان میتوان هر دو طرف غیر مساوات را به یك عدد که غیر صفر باشد ضرب کرد : اما اگر هر دو طرف را به عدد منفی ضرب

مینمائیم در آنصورت علامه غیر مساوات را معکوس ( جهت مخالف ) میسازیم .

مثال 6 :

نامساوات های ذیل را حل کنید :

$3x < 11 - 2x = ?$

$3x < 11 - 2x .$

$3x + 2x < 11$ به هر دو طرف 2x جمع شده

$5x < 11$

$x < \frac{11}{5}$ . هر دو طرف به $\frac{1}{5}$ ضرب کنید .

$x < \frac{11}{5}$

هر عددیکه از 11/5 کمتر باشد ، جواب معادله است .

یا $\{ x / x < 11/5 \}$

مثال 7 :

این غیر مساوات را حل نمائید :

$16 - 7y \geqslant 10y - 4 .$

به هر دو طرف معادله 16- جمع میکنیم $-16 + 16 - 7y \geqslant -16 + 10y - 4$

$-7y \geqslant 10 - 20$

به منفی 1/17 ضرب می نمائیم . $-17y \geqslant -20$

$y \leqslant 20/17$

هر عدد کمتر یا مساوی به 20/17 حل این غیر مساوات میباشد $y \leq 20/17$ سیت حل معادله فوق : این $\{y / y \leq 20/17\}$ میباشد .

---

تمرین : 14 - 16 ، حل نمائید .

14. $5x > 12 - 3x$

15. $17 - 5y \leq 8y - 5$

16. $12x - 6 < 10x + 1$

17. $x > \frac{5}{2}$

17 - 19 سیت ها را نوشته کینند :

18. $y \geq -7$ .

19. $x^2 = 5$ .

---

مثال 8 :

تعویض مجاز را در افادهٔ $\sqrt{5x - 4}$ معلوم کنید . تعویض مجاز افاده فوق عبارت از عددی است که قیمت افاده فوق را بزرگتر از صفر یا مساوی به صفر بسازد .

حل : $5x - 4 > 0$

$$5x \geq 4$$

$$x \geq \frac{4}{5}$$

$$x > \frac{4}{5}$$

سیت حل معادله . $\{x / x > \frac{4}{5}\}$

**تمرین :**

تعویض مجاز را در یافت کنید .

20. $\sqrt{x-2}$ 21. $\sqrt{x+3}$

22. $\sqrt{22-4x}$

---

**تمرین 1 - 2 :**

---

## معادلات و نامساوات های ذیل را حل کنید :

1. $4x + 12 = 60$
2. $2y - 11 = 37$
3. $4 + \dfrac{1}{2}x = 1$
4. $4.1 - 0.2y = 1.3$
5. $y + 1 = 2y - 7$
6. $5 - 4x = x - 13$
7. $5x - 2 + 3x = 2x + 6x - 4x$
8. $5x - 17 - 2x = 6x - 1 - x$
9. $1.9x - 7.8 + 5.3x = 3.0 + 1.8x$
10. $2.2y - 5 + 4.5y = 1.7y - 20$
11. $7(3x + 6) = 11 - (x + 2)$
12. $4(5y + 3) = 3(2y - 5)$
13. $2x - (5 + 7x) = 4 - [x - (2x + 3)]$
14. $y - (9y - 8) = [5 - 2y - 3(2y - 3)] + 29$
15. $(2x - 3)(3x - 2) = 0$
16. $(5x - 2)(2x + 3) = 0$
17. $x(x - 1)(x \div 2) = 0$
18. $x(x + 2)(x - 3) = 0$

19. $3x^2 + x - 2 = 0$

20. $10x^2 - 16x + 6 = 0$

21. $(x - 1)(x + 1) = 5(x - 1)$

22. $6(y - 3) = (y - 3)(y - 2)$

23. $x[4(x - 2) - 5(x - 1)] = 2$

24. $14\{(x - 4) - \frac{1}{14}(x + 2)] = (x + 2)(x - 4)$

25. $(3x^2 - 7x - 20)(2x - 5) = 0$

26. $(8x + 11)(12x^2 - 5x - 2) = 0$

27. $16x^3 = x$

28. $9x^3 = x$

29. $2x^2 = 6x$

30. $18x + 9x^2 = 0$

31. $3y^3 - 5y^2 - 2y = 0$

32. $3t^3 + 2t = 5t^2$

33. $(2x - 3)(3x + 2)(x - 1) = 0$

34. $(y - 4)(4y + 12)(2y + 1) = 0$

35. $(2 - 4y)(y^2 + 3y) = 0$

36. $(y^2 - 9)(y^2 - 36) = 0$

37. $x + 6 < 5x - 6$

38. $3 - x < 4x + 7$

39. $3x - 3 + 2x > 1 - 7x - 9$

40. $5y - 5 + y < 2 - 6y - 8$

41. $14 - 5y \leqslant 8y - 8$

42. $12x - 6 < 10x + 4$

43. $-\frac{3}{4}x > -\frac{5}{8} + \frac{2}{3}x$

44. $-\frac{5}{6}x < \frac{3}{4} + \frac{8}{3}x$

45. $4x(x - 2) < 2(2x - 1)(x - 3)$

46. $(x + 1)(x + 2) > x(x + 1)$

جوابات را با طرز سیت بنویسید :

47. $x \geq 2.5$

48. $y < -7$

49. $2t^2 = 10$

50. $m^3 + 3 = m^2 - 2$

تعویض مجاز روابط ذیل را دریافت کنید :

51. $\sqrt{x-3}$

52. $\sqrt{2x-5}$

53. $\sqrt{3-4x}$

54. $\sqrt{x^2+3}$

55. $2.905x - 3.214 + 6.789x = 3.012 + 1.805x$

56. $(13.14x + 17.152)(15.15 - 7.616x) = 0$

57. $3.12x^2 - 6.715x = 0$

58. $9.25x^2 + 18.03x = 0$

59. $1.52(6.51x + 7.3) < 11.2 - (7.2x + 13.52)$

60. $4.73(5.16 + 3.62) > 3.005(2.75y - 6.31)$

حل کنید :

61. $7x^3 + x^2 - 7x - 1 = 0$ [ کمك: $x^2(7x+1) - 1\ (7x+1) = 0$ ]

62. $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$

63. $y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0$

64. $t^3 + t^2 - 25t - 25 = 0$

65. $x^2 - x - 20 = x^2 - 25$

66. $(x+1)^3 = (x-1)^3 + 26$

67. $(x-2)^3 = x^3 - 2$

# ۲_۲ معادلات کسری

**اهداف :**

با تکمیل کردن این مبحث شما قادر خواهید شد که :

- تشخیص دهید که کدام معادله ها با هم معادل اند و معادله های کسری را حل کرده بتوانید .
- نشان دهید که آیا هر جوره معادله باهم معادل اند یاخیر ؟

---

**الف ) معادلات معادل :**

تعریف : معادلاتیکه سیت حل آنها یك سان باشد با هم معادل اند . در مثال، معادله اول و سه باهم معادل اند . زیرا معادله (1) به 4-ضرب گردیده و معادله (3) از آن بدست آمده است .

مثال اول :

| (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|
| $3x = 6$ | $3x + 5 = 11$ | $-12x = -24$ |
| $\{2\}$ | $\{2\}$ | $\{2\}$ |

جوره معادلات در مثال دوم و مثال سوم معادل نمیباشند .

مثال دوم : جوره معادلات :

$$3x = 4x \qquad \frac{3}{x} = \frac{4}{x}$$

$\{0\}$ سیت حل $\qquad$ $\{0\}$ حل ندارد

تقسیم بر $\{0\}$ $\infty$است .

مثال سوم : جوره معادلات :

$x^2 = x$    $x = 1$ باهم معادل نمیباشند .

سیت حل $\{0, 1\}$    $\{1\}$ سیت حل

---

تمرین :

دریافت کنید که آیا جوره معادلات باهمدیگر معادل اند ؟

1. $\begin{cases} 3x = 7 \\ -15x = -35 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 7 \\ 5x = 35 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = -5 \\ x^2 = 25 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = -5 \\ x + 1 = -4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+8)}{x-2} = x + 8 \\ x + 8 = x + 8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x^2 = 5x \\ 3x = 5 \end{cases}$

---

قواعد حل معادلات را از نگاه معادلات معادل بررسی مینمائیم .

مثال ذیل را با شرح قاعدهٔ جمع در نظر بگیرید :

$x + 5 = 9$

$(-5)$ را به هر دو طرف جمع مینمائیم :   $x + 5 + (-5) = 9 + (-5)$

$x = 4$

$a = b$

$a + c = b + c$

مثال: از مساوات $a = b$ با جمع کردن حرف $c$ به هر دو طرف ، معادله مساوات ذیل

را بدست میاوریم $a+c=b+c$ و اگر $-c$ را به هر دو طرف معادله مساوات جمع نمائیم دوباره مساوات اولی بدست میاید . همین قسم ، ماهر دو طرف مساوات را با عین عدد ضرب و تقسیم کرده میتوانیم . و در نتیجه تغیر وارد نمیشود .

**( ب ) : معادلات کسری :**

معادلاتیکه افاده های کسری داشته باشند ، بنام معادلات کسری یاد میگردند. حل این معادلات با ضرب کردن تحول ها به طریق آسانتر بدست می آید .

مثال چارم :

حل نمائید :

$$\frac{3}{x}=\frac{4}{x}$$

$$\frac{3}{x}=\frac{4}{x}\ .$$

$$\frac{3}{x}\times x^2=\frac{4}{x}\times x^2 \leftarrow \text{..........}$$ هر دو طرف معادله را به $x^2$ ضرب کنید .

$$3x=4x \leftarrow \text{..............................}$$ به هر دو طرف معادله $-3x$ جمع نمائید .

$$0=x$$

در معادله فوق قیمت ( $x=0$ ) حل معادله بعدی بوده، در حالیکه حـل معادله اولی نمیباشد. برای آنکه حل اساسی معادله دریافت شود، لازم است که قیمت حل را در معادله اولی تعویض نموده و بعد از امتحان در معادله اولی حل معادله را قبول کرده میتوانیم .

---

**احتیاط :** هنگامیکه هر دو طرف معادله را بامتحول ضرب و یا تقسیم مینمائید ، جواب آن معادله را در صورت حل بدون امتحان کردن قبول نکنید !

**تمرین : 7-- 8 :**

7. تشریح کنیدکه چطور $2x + 5x^2 = 5x^2$ را از $2x = 0$ بدست آورده میتوانید .

8. تشریح کنیدکه چطور ، $2x = 0$ را از $2x + 5x^2 = 5x^2$ بدست آورده میتوانید .

---

مثال 5 : حل کنید

$$\frac{x-3}{x-7} = \frac{4}{x-7}$$

$$\frac{x-3}{x-7} = \frac{4}{x-7}$$

هر دو طرف را به ( x − 7 ) ضرب نمودیم . $(x-7)\,X\,\frac{x-3}{x-7} = (x-7)\,X\,\frac{4}{x-7}$

$$x - 3 = 4$$

$$x = 7$$

حل احتمالی 7 میباشد و ما آنرا امتحان می نمائیم .

امتحان معادله : - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{x-3}{x-7} = \frac{4}{x-7}$$

احتیاط : چون معادله را به متحول ضرب کردید بعداز جواب ، امتحان کردن معادله شرط است !

| | |
|---|---|
| $\frac{7-3}{7-7}$ | $\frac{4}{7-7}$ |
| $\frac{4}{0}$ | $\frac{4}{0}$ |

وقتیکه صرف عملیه ضرب مطرح باشد، گروپ ساختن دو ویا چندین عدد ذریعه قوس نتیجه را تغیر نمیدهد. (گروپ نمودن اعداد در قوس ها جائز است )

۳_ مطابقت (Identity) :

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

ضرب هر عدد با یك ، خود همان عدد را میدهد.

٤_ عکس ها (Inverses) :

برای هر عدد حقیقی a غیر صفر $(a \neq 0)$ یك عدد معین موجود بوده ، که 1/a و یا ، $a^{-1}$ نوشته شده میتواند. واین عدد را بنام عکس ضربی (معکوس) a مینمایند که حاصل ضرب هر دو مساوی به یك است : $(a)(1/a) = 1/a\ (a) = 1$

مثال:

الف: معکوس (عکس ضربی) 2 عبارت از 1/2 است و معکوس ـ $1/a \notin a$ ، اگر $0 \neq a$

ب: معکوس ( عکس ضربی ) $-2/3$ ، عبارت از $-3/2$ است .

ج: معکوس ( عکس ضربی ) 0.16 عبارت از 6.25 است . مشخصه های مخصوص موجود میباشند که عملیه جمع را به عملیه ضرب ارتباط میدهند مانند :

توزیعی (Distributivity) :

برای هر عدد حقیقی a ، b ، و c نوشته کرده میتوانیم :

$$*a(b+c) = ab + ac$$

( این عمل را قانون توزیعی ضرب بالای جمع نام گذاری مینمایند. )

---

$*\ ab + ac = (a \times b) + (a \times c)$

چون تقسیم بر صفر لاتیناهی میشود ، لذا این معادله حل ندارد .

**تمرین :** 9 - 11 حل نمائید

**احتیاط :** امتحان کردن را فراموش نکنید !

9. $\dfrac{-5}{x} = \dfrac{7}{x}$

10. $\dfrac{x+4}{x+5} = \dfrac{-1}{x+5}$

11. $\dfrac{2x-7}{x+4} = \dfrac{5}{x+4}$

---

مثال ششم : حل کنید .

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$$

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$$

هر دوطرف معادله را به $(x-3)$ ضرب $(x-3) \, X \, \dfrac{x^2}{x-3} = (x-3) \, X \, \dfrac{9}{x-3}$ نمودیم .

$$x^2 = 9$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0$$

**احتیاط !** چون معادله را با متحول ضرب نموده اید

جواب را بدون امتحان کردن قبول نکنید !

$$x - 3 = 0 \qquad x + 3 = 0$$

$$x = 3 \qquad x = -3$$

چون معادله را به طریقه ضرب کردن متحول حل نمودیم لذا :

حل احتمالی ( 3 ) و ( 3 − ) را در معادله اولی ، بعد از امتحان کردن قبول کرده میتوانیم .

امتحان

$(-3)$ :

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{3-3}$$

| | |
|---|---|
| $\frac{(-3)^2}{-3-3}$ | $\frac{9}{-3-3}$ |
| $-\frac{9}{6}$ | $-\frac{9}{6}$ |

امتحان

$3$ :

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$$

| | |
|---|---|
| $\frac{3^2}{3-3}$ | $\frac{9}{3-3}$ |
| $\frac{9}{0}$ | $\frac{9}{0}$ |

( 3− ) جواب درست است، { 3 − } جواب و جواب 3 غلط است .

---

این تمرین ها را حل و امتحان نمائید :ـ

12. $$\frac{y^2}{y+4} = \frac{16}{y+4}$$

13. $$\frac{x^2}{x-5} = \frac{36}{x-5}$$

**مثال هفتم :** حل نمائید .

$$\frac{14}{x+2} - \frac{1}{x-4} = 1$$

هر دو طرف معادله را به کوچکترین مخرج مشترک:$(4-x)(2+x)$ ضرب مینمائیم :

$$(x+2)(x-4)X\frac{14}{x+2} - (x+2)(x-4)X\frac{1}{x-4} = (x+2)(x-4)X1$$

$$14(x-4) - (x+2) = (x+2)(x-4)$$

$$14x - 56 - x - 2 = x^2 - 2x - 8$$

$$13x - 58 = x^2 - 2x - 8$$

$$0 = x^2 - 15x + 50$$

$$0 = (x-10)(x-5)$$

$$x_1 = 10 \quad , \quad x_2 = 5$$

حل های احتمالی عبارت اند از 10 و 5 . یاسیت حل مساوی است به { 10 , 5 }

---

تمرین

14. $\frac{4}{x+5} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x^2-25}$ ------- حل کنید

## تمرین 2-2 :

معلوم کنید . که آیا این معادله های جوره با هم معادل اند یا خیر ؟

1. $\begin{cases} 3x + 5 = 12 \\ 3x = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 = -7x \\ x = -7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 3 \\ x^2 = 9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2y + 1 = -3 \\ 8y + 1 = -12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+9)}{(x-3)} = x + 9 \\ x + 9 = x + 9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + x - 20 = 0 \\ x^2 - 25 = 0 \end{cases}$

حل نمائید :

7. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{t}$

8. $\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{x}$

9. $\dfrac{3}{x-8} = \dfrac{x-5}{x-8}$

10. $\dfrac{23}{y} = \dfrac{-5}{y}$

11. $\dfrac{x+2}{4} - \dfrac{x-1}{5} = 15$

12. $\dfrac{t+1}{3} - \dfrac{t-1}{2} = 1$

13. $x + \dfrac{6}{x} = 5$

14. $x = \dfrac{12}{x} + 1$

15. $\dfrac{x+2}{2} + \dfrac{3x+1}{5} = \dfrac{x-2}{4}$

16. $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{x}{2}$

17. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{x}$

18. $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{3t} = 5$

19. $\dfrac{4}{x^2-1} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3}{x+1}$

20. $\dfrac{3y+5}{y+5y} + \dfrac{y+4}{y+5} = \dfrac{y+1}{y}$

21. $\dfrac{1}{2t} - \dfrac{2}{5t} = \dfrac{1}{10t} - 3$

22. $\dfrac{3}{m+2} + \dfrac{2}{m-2} = \dfrac{4m-4}{m^2-4}$

23. $1 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{40}{x^2}$

24. $1 - \dfrac{15}{y^2} = \dfrac{2}{y}$

25. $\dfrac{11-t^2}{3t^2-5t+5} = \dfrac{2t+3}{3t-2} - \dfrac{t-3}{t-1}$

26. $\dfrac{1}{3y^2-10y+3} = \dfrac{6y}{9y^2-1} + \dfrac{2}{1-3y}$

27. $\dfrac{2.315}{y} - \dfrac{12.6}{17.4} = \dfrac{6.71}{7} + 0.763$.

28. $\dfrac{6.034}{x} - 43.17 = \dfrac{0.793}{x} + 18.15$

29. $\dfrac{(x-3)^2}{x-3} = x - 3$

30. $\dfrac{x^2 + 6x - 16}{x - 2} = x + 8$

31. $\dfrac{x^2 + 8}{x + 2} = x^2 - 2x + 4$

32.. $\dfrac{x + 8}{x - 2} = \dfrac{8 + x}{-2 + x}$

33. $\dfrac{x + 3}{x} = 3$

نشان بدهید که این معادلات یکی بعد دیگر باهم معادل اند ؟

34. $x^2 - x - 20 = x^2 - 25$ (1)

$(x-5)(x+4) = (x-5)(x+5)$ (2)

$x + 4 = x + 5$ (3)

$4 = 5$ (4)

معادلاتیکه برای تمام تعویض های جائیز متحولها صدق میکنند ، بنام مطابقت ها یاد میشوند .

دریافت نمائید که کدام یك از این معادلات مطابقت ها میباشند !

35. $\dfrac{x^2 + 6x - 16}{x - 2} = x + 8$

36. $x + 4 = 4 + x$

4

37. $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$

38. $\dfrac{x + 8}{x - 4} = \dfrac{x - 2x +}{x - 2}$

39. $(x + 7)^2 = x^2 + 49$

40. $\sqrt{x^2 - 16} = x - 4$

حل نمائید :

41. $\dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{x+4}{x+3} = \dfrac{x+5}{x+4} - \dfrac{x+6}{x+5}$

---

## 2.3 بعضی فورمول های الجبری و طرز حل آنها :

**اهداف :**

با تکمیل کردن این مبحث شما قادر خواهید شد که :

الف : یك فورمول را از جنس یك متحول حل کنید .

ب : طرز حل ــ پرابلم را بکار برده پرابلم های تطبیقی را حل نمائید .

---

**فورمول ها :**

فورمول عبارت از یك دستور العمل برای محاسبه کردن است . بطور مثال : A مساحت سطحی یك مخروط را از جنس ارتفاع مایل (s) و شعاع قاعده (r) نشان میدهد .

$$A = \pi rs + \pi r^2 \text{ .................. I}$$

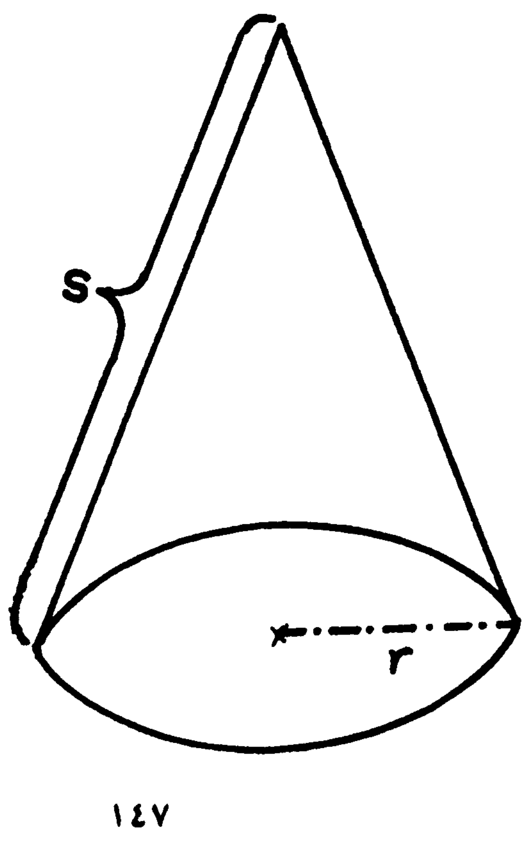
به کمك فورمول فوق ما میتوانیم ارتفاع مایل (S) مخروطی که مساحت و شعاع قاعده (r , A) آنرا داشته باشیم ، معلوم کنیم :

$$A = \pi rs + \pi r^2$$

$$A - \pi r^2 = \pi rs$$

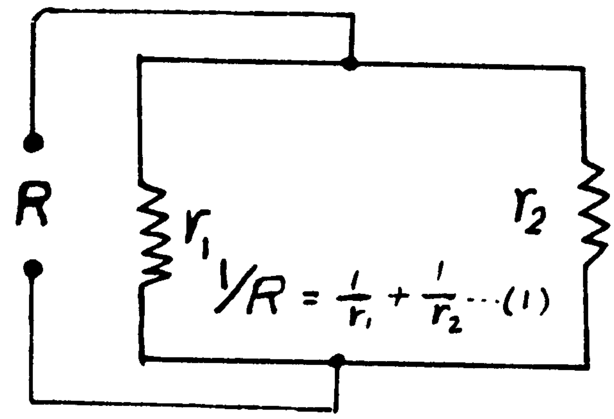
$$\frac{A - \pi r^2}{\pi r} = s$$

$$S = \frac{A}{\pi r} - r .$$



مثال دیگر : از فارمول $(1/R)=(1/r_1)+1/r_2$ ، R را معلوم کنید .

درین فورمول ، دو مقاومت $r_1$ ، $r_2$ بقسم موازی در یك سرکت برقی با هم وصل گردیده اند .




$r_1$ ، $r_2$ بقسم موازی بسته شده اند .

هردو طرف معادله (1) را به $R\,r_1 r_2$ ضرب می نمائیم

$$R\,r_1 r_2 X \frac{1}{R} = R\,r_1 r_2 X \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$R\,r_1 r_2 X \frac{1}{R} = R\,r_1 r_2 X \frac{1}{r_1} + R\,r_1 r_2 X \frac{1}{r_2}$$

$$r_1 r_2 = (r_2 + r_1) R$$

$$\frac{r_1 X r_2}{r_1 + r_2} = R .$$

# حل پرابلم

مطلب از حل پرابلم تطبیقی آن است ، که با بکار رفتن تکنیک ریاضی جواب سوالات مطرح شده بدست می آید . اگر چه بعضی پرابلم ها شاید شفاهی حل گردند ، ولی اکثریت آنها به کمک طرز العمل عمومی حل میشوند . نخست از پرابلم یك مفکوره گرفته ، و بعداً مفکوره را به لسان ریاضی در آورده ، سپس به محاسبه میپردازیم .

---

**تمرین :**

این فورمول را برای $r_2$ حل کنید .

2. $$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

در این فورمول F را معلوم کنید .

1. $$C^{\circ} = \frac{5}{9}(F^{\circ} - 32)$$

# عملیه تفریق

عملیه تفریق عکس عملیه جمع میباشد.

که در تعریف های ذیل توضیح گردیده است .

تعریف : برای هر عدد حقیقی a ، و b ،

$a - b = c$

اگر ..... $b + c = a$ باشد

**قضیه دوم :**

برای اعداد حقیقی a ، b صدق میکند که :

$a - b = a + (-b)$ ....... است .

قضیه دوم ، با تعریفات عملیه تفریق و عکس جمعی بناً یافته که مفهوم را توضیح مینماید.

تفریق کردن یك عدد به مفهوم جمع کردن عکس جمعی همان عدد است .

مثالهای ذیل را منفی کنید

$8 - 5 = 8 + (-5) = 3$ ,

$3 - 7 = 3 + (-7) = -4$ ,

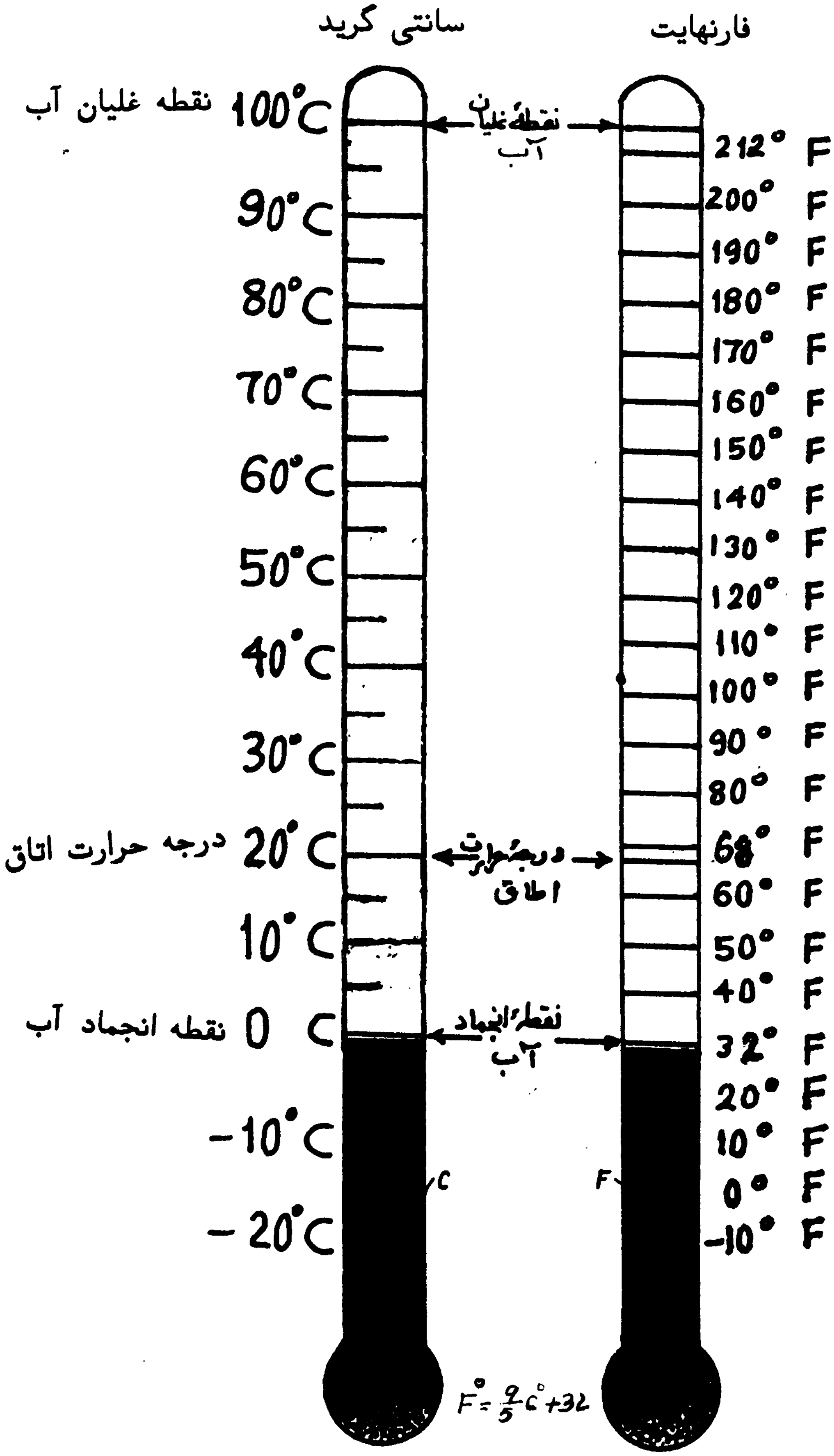
$8.6 - (-2.3) = 8.6 + 2.3 = 10.9$ ,

$-15 - (-5) = -15 + 5 = -10$ ,

$10 - (-4) = 10 + 4 = 14$ ,

$5/9 - 2/9 = 5/9 + (-2/9) = 1/3$ ,

در سیستم اعداد حقیقی ، عملیه ضرب بالای عملیهء تفریق توزیعیء است .




میزان الحراره سانتی گرید    میزان الحراره فارنهایت

# پروسه چار مرحله یی حل پرابلم ها

## ۱ــ آشناشدن با پرابلم :

نخست خود را با چگونگی پرابلم آشنا بسازید . اگر پرابلم به شکل تحریری باشد آنرا با بسیار دقت مطالعه نمایید .

الف : نمای تخنیکی پرابلم را ترسیم نمایید .

ب : لست عناصر معلوم و عناصریرا که قیمت آنها مطلوب است تکمیل نمایید .

ج : تمام معلومات را در یك چارت یا جدول تنظیم نمایید .

## ۲ــ افاده یا ترجمه پرابلم :

پرابلم را به لسان ریاضی یا سیمبولی افاده نمایید . بعداً آنرا با قواعد الجبری طوری تنظیم نمایید که جهت ارایه مجهول ها حروف به کار برده شوند .

## ۳ــ حل پرابلم :

پرنسیب ها ، و تحلیل های ریاضی را بکار برده ، راه های حل احتمالی را در یافت نمایید . این موضوع در الجبر به مفهوم تشکیل معادله الجبری تلقی میشود . یعنی معادله الجبری را تشکیل و بعداً آنرا حل نمایید .

## ٤ــ امتحان نمودن پرابلم :

حل معادله را امتحان و ملاحظه کنید که حل معادله حالت های متشخص پرابلم را تشریح کرده میتواند ویا خیر ؟

## مثال چارم :

چند فیصد 84 ، مساوی به 11.76 میشود ؟

(1) آشنا شدن به پرابلم : چند فیصد 84 ، مساوی است به 11.76 .

(2) افاده یا ترجمه پرابلم : فرضاً ، x % :

2. $(x\%) X (84) = 11.76$

(3) حل پرابلم

3. $(x X 0.01) X (84) = 11.76$

$(x) X 0.84 = 11.76$

$$x = \frac{11.76}{0.84} = 14 \qquad 1\% = 0.01$$

(4) امتحان

4. $(14\%)(84) = (0.14)(84) = 11.76$

جواب 14 %

## مثال پنجم :

14% کدام عدد مساوی به 11.76 میشود .

(1) آشنا شدن با پرابلم :

1. $(14\%)(y) = 11.76$ ?

(2) افاده یا ترجمه پرابلم : فرضاً ، عدد y :

2. $(14\%)(y) = 11.76$

(3) حل پرابلم :

3. $(0.14)(y) = 11.76$

$$y = \frac{11.76}{0.14} = 84 .$$

(4) امتحان پرابلم :

4. $(14\%)(84) = (0.14)(84) = 11.76$

جواب 84

**تمرین : 3 - 4 حل کنید :**

3. چند فیصد 76 ، 13.68 است

4. 24% کدام عدد ، 13.68 میشود

5. ( 36% ) 75 ?

---

پرابلم های مربوط به ربح مرکب :

**مثال ششم :**

یك مقدار سرمایه با مفاد 11% سالانه به شکل ربح مرکب سرمایه گذاری میشود . در اخیر یك سال ، سرمایه مذکور به 1443$ میرسد . معلوم کنید که اصلاً چقدر پول سرمایه گذاری شده بود ؟

مراحل حل پرابلم :

1. آشنا شدن با پرابلم : چندین طریقه موجود اند که این پرابلم را به لسان ریاضی افاده کنیم . اینکه : موضوع را چنین برسی میتمائیم .

مقدار پولیکه سرمایه گذاری شده ، با مفاد آن مبلغ 1443$ میشود .

2. افادهٔ پرابلم : سرمایه اولی که با 11% فایده سرمایه گذاری شده به لسان ریاضی چنین نوشته میتوانیم :

فرضاً x، مقدار سرمایه در بانگ گذاشته شده است .

$$x + (11\%)(x) = 1443$$

$$x + 0.11x = 1443$$

$$x(1 + 0.11) = 1443$$

$$x = \frac{1443}{1.11} = 1300$$

جواب 1300 $

حال سرمایه گذاری را که از یك سال زیادتر باشد تحت مطالعه قرار میدهیم .

اگر ما P دالر را به مفاد i به شکل ربح مرکب ، سرمایه گذاری کنیم ، سرمایه انتهائی در اخیر یك سال چنین خواهد بود : $A = p(1+i)$

در اخیر سال اول ← $A = p(1+i)$ , $A = [p(1+i)(1+i)]$ ← در اخیر سال دوم

$$A = p(1+i)^2$$

در پایان سال سوم : . $A = p(1+i)^3$

قضیه اول :

اگر سرمایه ابتدایی p ، با فایده ( i % ) ---> ( نرخ ) . . . . به شکل ربح مرکب برای t سال سرمایه گذاری شود ، سرمایه انتهائی ( A ) با این فارمول محاسبه میشود :

$$A = p(1+i)^t$$

t مدت زمان سرمایه در بانك .

مثال هفتم : $1000 به مفاد 12% به ربح مرکب سالانه سرمایه گذاری شده است سرمایه نهایی بعد از مدت ده سال چند خواهد بود ؟

جواب . $ 3105.85

$1000 به مفاد 12%

$A = p(1+i)^{10}$ , $t = 10$

$A = 1000(1+0.12)^{10} = 1000(1.12)^{10}$ ( توسط کلکولیتر )

$= \$3105.85$

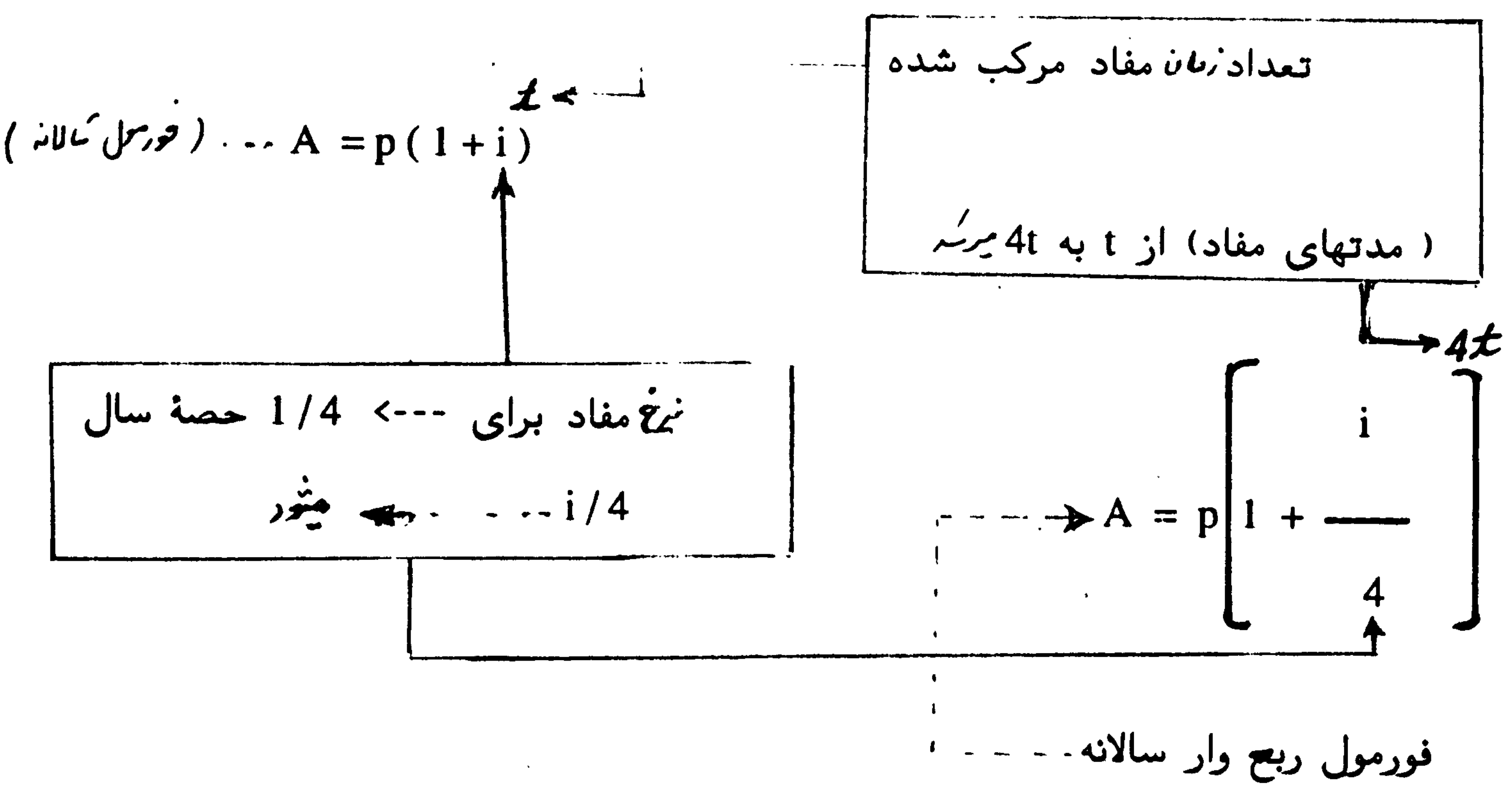
**تمرین** : 6-7 حل کنید .

6. یك سرمایه به نرخ 7% ربح مرکب سالانه گذاشته میشود ، سرمایه در اخیر یك سال به مبلغ $2782 میرسد . چه پول سرمایه گذاری شده بود ؟

7. فرضاً $1000 به نرخ مفاد 12.5% به ربح مرکب سرمایه گذاری شده است . بعد از گذشتن مدت 8 سال در حساب بانکی این معامله چه مقدار پول موجود خواهد بود ؟

---

بعضی اوقات سرمایه گذاری ، عوض نرخ سالانه به چندین نرخ در یك سال سرمایه گذاری میشود . مثلاً چار دفعه در سال ، یا ( به چارم حصه یك سال سرمایه گذاری میشود ) . پس درین صورت مدت فایده i / 4 حصه سال میشود . که در اینصورت فایده برای مدت i / 4 سال عبارت است از :




**قضیه دوم :**

اگر سرمایه ابتدائی p دالر با مفاد ( i ) ، ( n ) دفعه در یك سال به شکل ربح مرکب سرمایه گذاری شده باشد . سرمایه انتهایی بعد از t سال را از رابطه ذیل محاسبه

کرده میتوانیم .

t ---> تعداد سال

n ---> چند دفعه در یك سال

$$A = p\left[1 + \frac{i}{n}\right]^{nt}$$

**مثال هشتم :**

اگر $1000 به نرخ 12% به چارم حصه سال به شکل ربح مرکب سرمایه گذاری شده باشد ، سرمایه انتهایی بعد از ده سال چقدر خواهد بود ؟

حل مثال 8 :

$n = 4 \qquad t = 10 .$

$$A = P\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} = 1000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4\cdot 10}$$

$$= 1000\,(1.03)^{40}$$

$$\cong 3262.04 \;.$$

$\sim$ \$ 3262.04

جواب

**حل پرابلم مربوط به مساحت :**

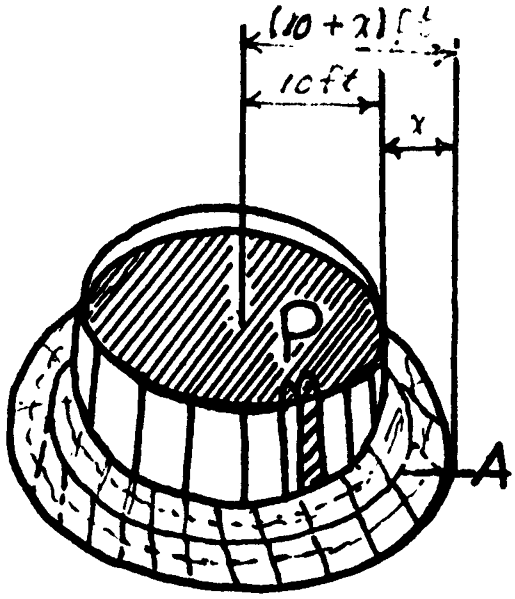
**مثال نهم :**

شعاع یك حوض آب بازی دایروی 10 فت است . یك پیاده رو که دارای عرض یك سان بوده ، به گرداگرد حوض ساخته میشود . اگر مساحت پیاده رو (44) فت مربع بوده باشد ، عرض پیاده رو را دریافت کنید .

این موضوع در چارت ( شکل ) ذیل دقیقاً تشریح شده است :

۱ــ آشنا شدن به پرابلم : نخست رسم تخنیکی پرابلم تهیه میشود .

میدانیم که مساحت دایره عبارت است از : $\pi r^2$ ، اگر عرض پیاده رو x باشد .




پس مساحت حوض : $P = \pi \times 10^2 = 100\pi$

مساحت پیاده رو ، و جمع مساحت حوض :

$$A = \pi \times (10 + x)^2 = \pi (100 + 20x + x^2)$$

۲ــ افادهٔ پرابلم :

مساحت پیاده رو = مساحت حوض − مساحت پیاده رو + مساحت حوض

$$\pi(100 + 20x + x^2) - 100\pi = 44\pi$$

۳ــ حل پرابلم :

هر دو طرف معادله را به $1/\pi$ ضرب می نمائیم . $100 + 20x + x^2 - 100 = 44$

$$x^2 + 20x = 44$$

$$x^2 + 20x - 44 = 0$$

$$(x + 22)(x - 2) = 0$$

$x = 2$ یا $x = -22$

$$x_1 = -22 \qquad x_2 = 2$$

٤ــ میبینیم که عدد 22 − حل معادله نمیباشد زیرا طول باید مثبت باشد، بنابران x = 2 عرض پیاده رو میباشد . x = 2 ft .

## حل پرابلم های مربوط به حرکت :

برای پرابلم هائیکه فاصله ، سرعت ، و وقت در آن شامل باشند ، باید تعریف سرعت را در نظر داشته باشیم :

$$\text{سرعت} = \frac{\text{فاصله}}{\text{وقت}} \quad , r = \frac{d}{t}$$

r = سرعت

t = وقت

d = فاصله

r (سرعت)

$$r = \frac{d}{t} \ , \ t = \frac{d}{r} \ , \ d = rt$$

مثال دهم :

یك کشتی به فاصله 246 کیلو متر هم سمت آب دریا ، و 180 کیلو متر مخالف جریان آب دریا حرکت میکند . وقت سفر به هر دو قسمت مساوی است ، سرعت آب دریا 5.5km / hr . میباشد ، سرعت کشتی را در آب استاده معلوم کنید .

۱ــ آشنا شدن با پرابلم : نخست با تکمیل کردن رسم تخنیکی تمام معلومات را در یك چوکات درج می نمائیم . وقت رفت و آمد مساوی است و آنرا به t نشان میدهیم .

فاصله طرف بالای دریا، فاصله طرف پائینی، سرعت آب دریا

5.5km / hr .    190km    246km

$t$ وقت ، $r$ <---- سرعت کشتی در آب استاده

-------------------------------------------------------------------->

فاصله (سرعت آب) + (سرعت کشتی)

$d = 246km \quad r + 5.5 = ?$

$t =$ وقت

<--------------------------------------------------------------------

فاصله (سرعت کشتی) -- (سرعت آب)

$d = 180km \quad r - 5.5 = ?$

| | وقت | سرعت | فاصله |
|---|---|---|---|
| پائین دریا (موافق جریان) | t | r + 5.5 | 246 |
| بطرف بالای دریا (مخالف جریان) | t | r − 5.5 | 180 |

$r = d / t$ .......... (1)

$$t = \frac{246}{r + 5.5} \;------- \; t = \frac{d}{r} \;------ \;(1)$$

چون وقت (t) رفت و آمد مساوی است .

$$t = \frac{180}{r - 5.5} \;, --------- \;(2)$$

معادله (1) و (2) با هم مساوی اند .

که این مفهوم را قضیه ذیل بوجه خوبتر تشریح می نماید:

**قضیه سوم :**

برای هر عدد حقیقی a ، b، و c صدق میکند که :

$$a(b-c)=ab-ac$$

( این قانون توزیعی عملیه ضرب بالای عملیه تفریق میباشد. )

$$t = \frac{246}{r + 5.5} = \frac{180}{r - 5.5}$$ --------- معادله پرابلم

حل معادله ----- r == 35.5 km / hr $\qquad$ r = 35.5km / hr .

---

تمرین 10 :

یك طیاره هم سمت باد فاصله 1062 کیلو متر را در همان زمانی طی میکند که این طیاره میتواند فاصله 738 کیلو متر را مخالف سمت حرکت باد طی نماید ، سرعت طیاره موصوف در هوای ساکن 200 کیلو متر فی ساعت میباشد . سرعت باد را دریافت کنید .

---

## مثال یازدهم :

سرعت کشتی در آب استاده 10 mil / hr است . کشتی مذکور به فاصله 24 میل مخالف جریان آب ، و به فاصله 24 میل موافق جریان آب ، برای مدت مجموعاً 5 ساعت حرکت نموده است . سرعت جریان آب دریا را معلوم کنید .

۱ـ آشنا شدن با پرابلم : نخست رسم تخنیکی پرابلم را تکمیل می نمائیم . میدانیم که سرعت کشتی 10mil / hr است . سرعت جریان آب را به حرف c نشان میدهیم .

موافق جریان دریا <-------------------------------

$d_1 = 24$ mi $\qquad$ $t_1 =$ مجهول

سرعت کشتی جمع سرعت آب

$10 + c$

-------------------------------------->

$d_2 = 24$mi $\qquad$ $t_2 =$ مجهول

سرعت کشتی منفی سرعت آب

$10 - c$

ترجمه پرابلم : چون $t_1 + t_2 = 5hr.$

از طرف دیگر

$$t = \frac{d}{r}$$

لذا

$$\frac{d_1}{r_1} + \frac{d_2}{r_2} = 5$$

و همچنان

$$\frac{24}{10+c} + \frac{24}{10-c} = 5$$

معادله فوق را برای c حل کنید ... $c = 2$ ، سرعت آب

چون سرعت منفی شده نمیتواند ، لذا سرعت آب $c = 2mph$

**مثال ۱۲ :**

پرابلم های مربوط به کار :

تایپست A یك کار تایپستی را در 3 ساعت تکمیل مینماید، در حالیکه تایپست B همان کار تایپستی را در 5 ساعت تکمیل کرده میتواند . هر دو تایپست ، کار فوق را بقسم یکجایی در چقدر وقت تمام خواهند کرد ؟

۱ـ آشنا شدن با پرابلم :

تایپست A کار را در 3 ساعت انجام میدهد .

در حالیکه تایپست B همان کار را در 5 ساعت انجام میدهد .

اگر هر دوی ایشان باهم یکجا کار نمایند، همان کار در t ساعت تمام خواهد شد .

چون تایپست A در ظرف یك ساعت ، 1/3 حصه کار انجام میدهد در حالیکه

تایپست B در ظرف یك ساعت ، 1/5 حصه کار را انجام داده میتواند .

پس هر دوی ایشان در ظرف یك ساعت ، 1/3 + 1/5 حصه کار را انجام داده میتوانند .

اگر هر دو ایشان یکجا کار را در t ساعت تمام کنند پس (1/t) حصه کار را به قسم دسته جمعی در یك ساعت تمام خواهند کرد .

۲ـ افاده :

آنها یکجائی (1/t) حصه کار را در یك ساعت انجام داده میتوانند که مساوی است

به $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ ... حصه کار

لذا : به ( لسان ریاضی ) $1/t = 1/5 + 1/3$

۳ـ طرز حل :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{t}$$ ----- ( معاله پرابلم )

$$5t + 3t = (3)(5)$$

$$8t = 15$$

$$t = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} = (112\frac{1}{2}$$ دقیقه)

مثال ۱۲ :

در ساختمان یك دیوار ، احمد نظر به محمود 9 ساعت زیاد تر وقت ضرورت دارد که دیوار را به تنهائی اعمار کند . اگر هر دوی ایشان یکجائی کار کنند ، دیوار مذکور

را در 20 ساعت تکمیل مینمایند . هر گاه هر کدام به تنهائی کار کنند ، دیوار را د
چقدر وقت تمام خواهند نمود ؟

طرز حل :

وقتیکه محمود دیوار را به تنهائی در t ساعت اعمارکند، پس وقت تنهائی احمد (t + 9) ساعت خواهدبود. احمد (1 / t) حصه کار را دریك ساعت تکمیل میکند، و محمود (1 / t + 9) حصه کار را در ظرف یك ساعت تکمیل کرده میتواند . در حالیکه هر دوی ایشان(1/20 حصه کار را در یك ساعت تکمیل میکنند).

مطلب فوق را به لسان ریاضی چنین نوشته کرده میتوانیم .

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20}$$

اگر این معادله حل شود $t_1 = -5$ ، و $t_2 = 36$ میشود . چون وقت منفی شده نمیتواند ، لذا $t_2 = 36$ ، عبارت از تعداد ساعاتی است که احمد به تنهائی کار را انجام داده میتواند . البته محمود این کار را به تنهائی در (36 + 9) ساعت که مساوی به 45 ساعت میشود ، تکمیل مینماید .

---

**تمرین :**

11. یك ریل یك ستیشن را ترك میگوید و به سرعت 75 کیلومتر فی ساعت طرف شمال سفر میکند . دو ساعت بعد تر یك ریل دومی موازی به ریل اولی در مسیر دیگر به سرعت 125 کیلو متر فی ساعت به سمت شمال حرکت میکند . چقدر از ستیشن دورتر ریل دومی ، ریل اولی را فرا میگیرد ؟

13. A یك چمن را در 4 ساعت درو میکند ، در حالیك B همین چمن را در ظرف 5 ساعت درو کرده میتواند . اگر هر دو : A ، و B یکجائی چمن را درو کنند ، چقدر وقت را دربر خواهد گرفت ؟

## مثال ۱۴ :

احمد و محمود یك کار معین را بقسم یکجائی در ظرف 4 ساعت انجام داده میتوانند . اگر احمد این کار را به تنهای آغاز نماید 6 ساعت بعد تر نظر به محمود آنرا خلاص کرده میتواند، هر کدام آنها به تنهای خود این کار را در چقدر وقت تمام خواهد نمود .

وقت کار محمود ... فرضاً t باشد

و ؛ احمد ... t+6 میباشد

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+6}=\frac{1}{4} \quad \text{...(معادله ۱)}$$

$$t^2-2t-24=0$$

احمد 12 و محمود 6 ساعت

## تمرین : 2-3

1. $p=2L+2w$ $w=?$ .............................. محیط مستطیل

2. $F=ma$ ........................ « قانون دوم نیوتن » – برای a حل کنید

3. $E=IR$ $I=?$ ............................ قانون اوم ( برق )

4. $F=\dfrac{km_1\,m_2}{d^2}$ -- قانون قوهٔ جاذبه بین دو جسم را برای $m_2$ حل کنید

5. $\dfrac{P_1V_1}{T_1}=\dfrac{P_2V_2}{T_2}$ ، $T_1=?$ ---- فورمول فشار و درجهٔ حرارت

6. $\dfrac{P_1V_1}{T_1}=\dfrac{P_2V_2}{T_2}$ ، $V_2=?$ ------------ فورمول فشار و حرارت

7. $S = \dfrac{H}{m(v_1 - v_2)}$ ------------- فورمول را از جنس $V_1$ حل کنید

8. $S = \dfrac{H}{m(v_1 - v_2)}$ ------------ فورمول را از جنس $V_2$ حل کنید

9. $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{P}$ ------- فورمول را از جنس F حل کنید

---

**تمرین :**

برای x حل کنید :

11. $(x+a)(x-b)=x^2+5$

12. $(c+d)x+(c-d)x=c^2$

13. $10(a+x)=8(a-x)$

14. $4(a+b+x)+3(a+b-x)=0$

## سوالات عبارتی

-15 79.2 چند فیصد عدد 180 است ؟

-16 6% کدام عدد 480 میشود ؟

-17 چند فیصد 28 عبارت از 1.68 است .

-18 7% ، عدد 45.3 چند میشود .

-19 یك شخص از 11% تزئید معاش خود مبلغ $1595 گرفته است ، معاش اصلی و معاش دومی اش چند است ؟

-20 یك شخص از 12% تزئید معاش خود مبلغ $2520 اخذ نموده است ، معاش اصلی و معاش جدید این شخص چند خواهد بود ؟

-21 سرمایۀ به فائده 8% به ربح مرکب سالانه گذاشته شده است . در اخیر یك سال اگر سرمایه به $702 صعود کند ، اصل سرمایه چقدر میباشد ؟

-22 سرمایه ای به 9% فائده به شکل ربح مرکب سالانه در بانك سرمایه گذاری شده است و در اخیر یك سال در بانك مبلغ $926.50 موجود است ، سرمایه اولی چقدر بوده است ؟

-23 در یك مثلث ABC زاویه B پنج چند زاویه A است و زاویه C ، 2 کمتر از زاویه A میباشد ، اندازه زاویه های مثلث چند درجه خواهد بود ؟ ( نوت : زاویای داخلی یك مثلث $180^\circ$ درجه است )

-24 در یك مثلث ABC ، زاویه B دو چند زاویه A میباشد . زاویه C به اندازه 20 از زاویه A بیشتر است ، زاویای مثلث چند درجه خواهد بود ؟

-25 محیط یك مستطیل 322 متر ، وطول آن از عرضش 25 متر زیاد تر است ، طول و عرض مستطیل را معلوم کنید .

26- طول یك مستطیل دو چند عرض آن میباشد . و محیط مستطیل 39 متر است ، طول و عرض این مستطیل را معلوم کنید .

27- نمرات یك شاگرد در سه امتحان بالترتیب : 87% ، 64% ، 78% میباشند . نمرهٔ امتحان چارم شاگرد چند شاگرد چند خواهد بود ، در صورتیکه اوسط نمرات این شاگرد به 80% برسد ؟

28- نمرات سه امتحان یك شاگرد 74% ، 55% و 68% میباشند . نمرهٔ امتحان چارم شاگرد چند خواهد شد که اوسط چار امتحان وی 70% شود ؟

29- یك بکس باز از یك پارچه حلبی 10 X 20 سانتی متر ( 10cm X 20cm ) طوری ساخته میشود که از هر کنج آن یك مربع خورد قطع میشود . و بعداً پارچه حلبی را جمع کرده بکس سرباز بدست می آید . اگر مساحت قاعده این بکس 60% مساحت پارچه حلبی باشد، اضلاع مربع قطع شده چند خواهد بود ؟

30- چوکات یك عکس از طرف بیرون به ابعاد 28 X 32 سانتی متر است . عرض حاشیه این چوکات منظم و یکسان است . اگر در چوکات مذکور عکسیکه مساحت آن 192 سانتی متر مربع بوده نصب شده بتواند ، عرض حاشیه چوکات را معلوم کنید .

31- بعد از 2% تزئید ، نفوس یك شهر به 826200 نفر بالغ شده است . نفوس اولی این شهر چقدر بوده است ؟

32- بعد از 3% تزئید ، در نفوس احصائیه یك شهر 741,600 نفر ثبت گردیده . نفوس اولی این شهر چند نفر بوده است ؟

33- سفر یك کشتی به فاصله 50 کیلومتر موافق جریان آب در دریا عین وقت را دربر میگیرد که کشتی مذکور به فاصله 30 کیلو متر مخالف جریان آب سفر

میکند . سرعت آب دریا 3 کیلو متر فی ساعت است . سرعت کشتی را در آب استاده معلوم کنید .

-34 یك کشتی به فاصله 50 کیلو متر موافق جریان آب ، و 30 کیلو متر مخالف جریان آب سفر میکند ، و مدت زمان هر دو سفر را که تکمیل میکند مساوی است . سرعت کشتی در آب استاده 16 کیلو متر فی ساعت است ، سرعت جریان آب دریا را معلوم کنید .

-35 سرعت ریل A ، 12 ( mph ) از سرعت ریل B کمتر است . ریل A ، 230 میل فاصله را ، و ریل B ، 290 میل فاصله را در عین وقت طی میکنند . سرعت هر ریل را معلوم کنید .

-36 سرعت یك ریل مسافر بردار از سرعت ریل باربری ، ( 14mph ) بیشتر است . ریل مسافر بردار 400 میل فاصله را در همان وقت طی میکند ، که ریل باربری 330 میل فاصله را می پیماید . سرعت هر ریل را معلوم کنید .

-37 یك طیاره شهر A را به سرعت 475mph ترك میگوید . 20 دقیقه بعد تر ، یك طیاره دیگر شهر B را که 350 میل از شهر A فاصله دارد به سرعت 500mph ترك میگوید . چه وقت آنها با هم ملاقی میشوند . محل ملاقات هر دو طیاره از شهر A چقدر فاصله دارد ؟

-38 یك طیاره شخصی یك میدان هوایی را ترك میگوید و به سمت شرق به سرعت 180kmh پرواز میکند. 2 ساعت بعد تر ، یك طیاره جیت همان میدان را به سرعت 900 کیلو متر فی ساعت ترك میگوید . به کدام فاصله از میدان ، طیاره جیت ، طیاره شخصی را فرا میگیرد ؟

-39 A ، یك کار را در سه ساعت انجام میدهد ، B همان کار را در 5 ساعت انجام داده میتواند و C همان کار را در 7 ساعت تکمیل کرده میتواند . اگر

هر سه ایشان یکجایی کارکنند آن کار را در چقدر وقت تمام خواهندکرد؟

40- پایپ A یك حوض را در 4 ساعت ، پایپ B در 10 ساعت و پایپ C در 12 ساعت ، به تنهایی پر کرده میتواند . اگر هر سه پایپ یکجا جاری شوند حوض را در چندساعت پر مینمایند ؟

41- A یك کار را به تنهایی در 3.15 ساعت اجراء میکند . اگر A با B یکجایی کار کنند ، همان کار را در (2.09) ساعت انجام داده میتوانند . اگر B به تنهایی اینکار را آغاز نمایددرچقدر وقت آنرا تمام خواهدکرد ؟

42- دود فابریك A هوا را 2.13 بار زیادتر نسبت به فابریکه B کثیف میسازد . اگر هر دو فابریکه در یك وقت چالان شوند ، هوا را در 16.3 ساعت کثیف میسازند . اگر هر کدام آنها به تنهایی فعالیت داشته باشند هوا را در چقدر وقت کثیف خواهد ساخت ؟

43- $1000 به فایده % (13.75) سرمایه گذاری میشود . در اخیر یکسال در حساب بانکی چقدر پول خواهد بود اگر : . . (ربح مرکب است)

الف : سرمایه گذاری به "ربح مرکب" سالانه باشد ؟

ب : نیم ساله باشد ؟

ج : ربع وار باشد ؟

د : روزانه باشد (365 روز یکسال) ؟

ذ : ساعت وار باشد ؟

44- $1000 به نرخ 15.5% به فایده گذاشته شد . سرمایه نهایی بعد از 5 سال چقدر خواهد بود ، اگر "ربح مرکب" باشد ؟

الف : سالانه ؟

ب : نصف سال ؟

# عملیه تقسیم

عملیه تقسیم عمل معکوس عملیه ضرب میباشد که در تعریف ذیل ارائه شده است :

برای هر عدد حقیقی a و هرعدد b ، که b صفر نباشد ! $(b \neq 0)$

است $a \div b = c$ ...........

اگر $bc = a$ باشد ( $a \div b$ ) عبارت از عددی است ، که هر گاه با b ضرب شود عدد a را بدهد)

**قضیه چهارم :**

برای هر عدد حقیقی a و عدد غیر صفر b :

$$a \div b = a(1/b)$$

تعریف عملیه تقسیم ، موازی با عملیه تفریق ، از نقطه نظر قضیه های 2 و 4 با هم دیگر مشابهت دارند .

**مثال ها :** از قرار ضرب کردن با معکوس ، عملیهء تقسیم را اجراء کنید.

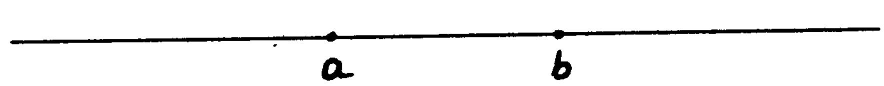
22. $3/4 \div (-2/3) = (3/4)(-3/2) = -9/8$

23. $-6/7 \div (-3/5) = (-6/7)(-5/3) = 10/7$

از قضیه چهارم استنباط میشود که خارج قسمت دو عدد منفی ، مثبت است و همچنان خارج قسمت یك عدد منفی ، و یك عدد مثبت ، خود منفی است .

**ترتیب :**

ترتیب اعداد حقیقی از وجه حدث مثبت ، ذریعه یك خط نشان داده میشود:




اگر عدد a به طرف چپ عدد b مجسم شود ، پس عدد a از عدد b خوردتر

ج : ربع سال ؟

د : روزانه (365 روز یکسال ) ؟

ذ : ساعت وار بعد از 5 سال ؟

45- یك موتر 144 میل سفر کرده است ، اگر موتر مذکور 4mph سریع تر میرفت همین فاصله را در نیم ساعت کمتر طی میکرد . سرعت موتر چند بوده است ؟ ( سرعت اوسط مساوی است به فاصله مجموعی تقسیم بر وقت مجموعی )

46- یك موتر 280 میل فاصله را طی کرده است . اگر این موتر 5 میل فی ساعت بیشتر سرعت میداشت این مسافه را در یکساعت کمتر از وقت قبلی طی میکرد . اصل سرعت موتر چند بوده است ؟

47- یك شاگرد برای مدت 3 ساعت در سرك های شهر به سرعت 55 میل فی ساعت دریوری کرده ، بعداً 10 میل فاصله را در شهر به سرعت 35mph طی کرده . سرعت اوسط او چند بوده است ؟ ( سرعت اوسط = فاصله مجموعی تقسیم بر وقت مجموعی )

48- یك سفر 200km دور تر ، در نظر است . حصه اول سفر که 100km است به سرعت 40km / h ونصف دوم آن به سرعت 60km / h طی میشود . اوسط سرعت برای تمام سفر چند خواهد بود ؟

49- یك درایور نصف فاصله یك سفر را به سرعت 40mph طی میکند . درایور موصوف بکدام سرعت ، فاصله متباقی را طی کند که اوسط سرعت تمام سفر او 45mph باشد ، و سفر در یك ساعت تکمیل شود ؟

50- در کدام وقت بعد از ساعت ( 4:00 ) برای اولین دفعه ، عقرب های یك ساعت ( ساعت گرد و دقیقه گرد ) باهم عمود خواهند بود ؟

51 - تکرار سؤال 50 ، وقت ( 10:30 ) .

-52 سه عراده لاری B , A و C باهم یکجاکار میکنند که یك مقدار ریگ را در t ساعت انتقال دهند . هر گاه ، هر کدام از لاری ها به تنهایی کار کند، لاری A ریگ را در یك ساعت زیاد تر ، و لاری B ریگ را در 6 ساعت زیادتر ، و لاری C ریگ را در t ساعت زیادتر از وقت کار یکجائی انتقال داده میتواند . وقت t را معلوم کنید .

-53 یك طیاره از شهر A تا به شهر B در حالیکه باد از عقب آن به سرعت 50mph میوزد ، به سرعت 750 پرواز میکند .
فاصله از شهر A تا شهر B 2574 میل است .

الف : آن نقطه را پیدا کنید که وقت بازگشت به شهر A همانقدر باشد که طیاره به شهر B میرفت .

ب : بعد از آنکه طیاره 1187 میل فاصله را طی میکند پیلوت متوجه میشود که باید طیاره عاجلاً به زمین فرود آید . آیا رفتن طیاره به شهر B وقت کمتر را دربر خواهد گرفت یا اینکه به شهر A باز گشت نماید ؟

-54 یك مامور با موتر خود به سرعت 45mph به سوی دفتر خود میرود و یك دقیقه وقت تر به آنجا میرسد . اگر به سرعت 40mph حرکت کند به دفتر خودیك دقیقه ، ناوقت تر میرسد . دفتر مامور از خانه اش چقدر دور است؟

-55 b ، 20% از a زیادتر و c از b ، 25% بیشتر است . و d به اندازه K% از c کمتر میباشد K را در صورتی پیدا کنید که a = d باشد ؟

-56 $1000 به ربح مرکب ربعی (1/4) به مفاد 11% به قرضه گذاشته شده است . نرخ معادل آنرا پیدا کنید در صورتیکه این سرمایه به ربح سالانه سرمایه گذاری شود ؟

# * ۴_۳ اعداد کمپلکس

**اهداف :**

با تکمیل کردن اینمبحث شما قادر خواهید شد که :

الف : اعداد موهوم ( جذر مربع عدد منفی ) را به حرف i تشریح نمایید .

ب : جمع ، تفریق و ضرب اعداد مختلط را اجراء کرده بتوانید، و نتیجه را به شکل a + bi نمایان سازید .

ج : دریابید که آیا یك عدد مختلط حل یك معادله است یا خیر ؟

د : درك کردن این حقیقت که ، در صورت باهم مساوی بودن اعداد مختلط ، بایدحد حقیقی و حد موهوم باهم عین چیز باشند .

ذ : مزدوج یك عدد مختلط را پیدا کنید و اعداد مختلط را باهم تقسیم کرده بتوانید .

و : معکوس عدد مختلط را دریافت کرده و آنرا به شکل a + bi بیان کنید .

ز : معادله خطی را که دارای ضریب از اعداد مختلط باشد حل نموده بتوانید.

در جمله اعداد حقیقی ، اعداد منفی جذر مربع ندارند . برای انکه معضله تا اندازه آسان گردد ، بنام « موهوم » ( Imaginery ) عددی مشخص گردیده که ذریعه آن میتوان جذر مربع عدد منفی را پیدا کنیم . و معادلات لاینحل را قابل حل سازیم .

عدد موهوم را که بحرف ( i ) ارائه میشود چنین تعریف نموده اند :

---

* عدد کمپلکس (عدد مختلط) آن عدد است که جز حقیقی وموهومی داشته باشد. (a+bi)

**تعریف :**

$i=\sqrt{-1}$ عدد ، و ..................... $i^{2}=-1$ است

تمام اعداد موهوم بطریقه حاصل ضرب عدد غیر صفر حقیقی و حرف (i) نشان داده میشوند .

تعریف : عدد موهوم عبارت از عددی است که به شکل (bi) نشان داده شود ، در صورتیکه (b) عدد حقیقی بوده و مساوی به صفر نباشد . $(b \neq 0)$ . مثال : به شکل (i) تشریح کنید :

1. $\sqrt{-7}=\sqrt{-1 \times 7}=\sqrt{-1}\times\sqrt{7}=i\sqrt{7}\,,\ \sqrt{7}\ i$

2. $\sqrt{-16}=\sqrt{-1\times 16}=\sqrt{-1}\times\sqrt{16}=i\times 4=4i$

3. $-\sqrt{-13}=-\sqrt{-1\times 13}=-\sqrt{-1}\times\sqrt{13}=-i\sqrt{13}\,,$
   $-\sqrt{13}\,i$

4. $-\sqrt{-64}=-\sqrt{-1\times 64}=-\sqrt{-1\times 64}=-i\times 8$
   $=-8i$

5. $\sqrt{-48}=\sqrt{-1\times 48}=\sqrt{-1}\times\sqrt{48}=i\sqrt{48}=i\times 4\sqrt{3}$

بخاطر باید داشت ، که بالای عدد موهوم تمام قوانین که در اعداد حقیقی بکار میروند ، قابل تطبیق میباشد .

**قابل توجه :**

قبل از آنکه عدد موهوم ساده شود باید به شکل (i) در آورده شود .

مثال 6 : ساده سازید .

$$\sqrt{-3}\sqrt{-7}=?$$

$$\sqrt{-3}\sqrt{-7}=i\sqrt{3}\,X\,i\sqrt{7}$$

$$i^2\sqrt{3}\sqrt{7}=-1\,X\sqrt{21}$$

$$=-\sqrt{21}$$

مثال 7 : ساده سازید .

$$-\sqrt{20}/\sqrt{-5}=?$$

$$\frac{-\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}=\frac{-\sqrt{20}}{i\sqrt{5}}\,X\,\frac{i}{i}=\frac{-i\sqrt{20}}{i^2\sqrt{5}}=\frac{-i}{-1}\,X\sqrt{\frac{20}{5}}\;i\sqrt{4}=2i$$

---

تمرین : به شکل (i) در آورید .

1. $\sqrt{-6}$
2. $-\sqrt{-10}$
3. $\sqrt{-4}$
4. $-\sqrt{-25}$
5. $\sqrt{-5}\sqrt{-2}$
6. $\frac{\sqrt{-22}}{\sqrt{-2}}$
7. $\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{3}}$
8. $\sqrt{-16}+\sqrt{-9}$
9. $\sqrt{-25}-\sqrt{-4}$
10. $\sqrt{-17}+\sqrt{-9}$

مثال 8 :

$$\sqrt{-9}+\sqrt{-25}.$$

$$\sqrt{-9}+\sqrt{-25}=i\sqrt{9}+i\sqrt{25}$$

$$=3i+5i=(3+5)i$$

$$=8i$$

**توان (i) :**

توان (i) را با در نظر داشت تعریفی که $i^2=-1$ است ، ساده ساخته میتوانیم .

ساده سازید :

$$i^2=-1$$

$$i^3=i^2 X i=(-1)i=-i,$$

$$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1,$$

$$i^5=i^4 X i^1=(i^2)^2 X i=(-1)^2 X i=i,$$

$$i^6=(i^2)^3=(-1)^3=-1,$$

از تحلیل فوق نتیجه میگیریم که توان (i) سایکل : (i , 1 - , i - , 1) را طی میکند.

مثال : ساده سازید.

9. $i^{37}=i^{36} X i=(i^2)^{18} X i=(-1)^{18} X i=1 X i=i$

10. $i^{58}=(i^2)^{29}=(-1)^{29}=-1$

11. $i^{80}=(i^2)^{40}=(-1)^{40}=1$

**تمرین :** ساده نمائید .

11. $i^{25}$ 12. $i^{18}$

13. $i^{31}$

## ب : اعداد مختلط :

معادله ، $x^2 + 1 = 0$ به اساس اعداد حقیقی حل ندارد . اما از طریق اعداد موهوم ($i$ نو $-$) معادله فوق حل دارد .

اما، بعضی معادلات ظاهراً خیلی ساده به نظر میرسند ، ولی : به هر دو طریق حل ندارد .

مانند : $x^2 - 2x + 2 = 0$

ولی اگر جمع عدد حقیقی عدد موهوم را قبول کرده بتوانیم ، در آنصورت حل آن امکان پذیر میگردد .

برای آنکه اکثر معادلات را حل کرده بتوانیم ، سیستم اعداد کمپلکس ایجاد شده است که حل معادلات را امکان پذیر میسازد .

## ( سیستم اعداد کمپلکس ) :

اعداد کمپلکس آن اند که جز موهوم و جز حقیقی داشته باشند . باید اعداد حقیقی را جدا و اعداد موهوم را جدا جمع نمائیم . اعداد ذیل بنام اعداد کمپلکس یاد میشوند .

$$7 - 4i \;,\; -\pi + 19i \;,\; 37 + i\sqrt{8}$$

## تعریف :

عدد کمپلکس عددی است که شکل $a + bi$ داشته ، $a$ جز حقیقی و $bi$ جز موهوم است . تمام قواعد الجبری که بالای اعداد حقیقی تطبیق میشوند بالای اعداد مختلط نیز قابل تطبیق اند. به عبارہ دیگر * (Field properties)، بالای اعداد کمپلکس نیزقابل تطبیق میباشد.

---

* توان قوانین اعداد حقیقی بالای آن قابل تطبیق است .

## محاسبه اعداد کمپلکس :

چون در سیستم اعداد کمپلکس ، ( Field property ) قابل تطبیق میباشد ، لذا در محاسبۀ این سیستم قواعد اعداد حقیقی عیناً در نظر گرفته میشوند ، البته با توجه به اینکه $i^2 = -1$ چنین تعویض صورت بگیرد .

**مثال ۱۳** : ساده سازید .

$$i^2 = -1$$

$(8 + 6i) + (3 + 2i)$

$(8 + 6i) + (3 + 2i) = 8 + 3 + 6i + 2i = 11 + 8i$

**مثال ۱۴** : ساده سازید .

$(1 + 2i)(1 + 3i)$ .

$(1 + 2i)(1 + 3i) = 1 + 6i^2 + 2i + 3i = 1 - 6 + 2i + 3i = -5 + 5i$

**مثال ۱۵** : ساده سازید .

$(3 + 2i) - (5 - 2i)$ .

$(3 + 2i) - (5 - 2i) = 3 + 2i - 5 + 2i = 3 - 5 + 2i + 2i = -2 + 4i$

ساده سازید :

---

تمرینات :

14. $(8 - i) + (4 + 2i)$

15. $(9 + 2i) - (4 + 3i)$

16. $(2 + 4i)(3 + i)$

17. $(4 + 5i) + (4 - 5i)$

18. $2i(4 + 3i)$

19. $(5 + 6i) - (5 + 3i)$

**مثال ١٦ : فیکتور نمایید .**

$x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi)$

---

تمرین : فیکتور نمایید .

20. $x^2 + 4$ 21. $9 + y^2$

---

د : حل معادلات :

از طریق سیستم اعداد کمپلکس ، اکثر معادلات که بطریقه دیگر حل نمیشوند ، حل دارند . در هر معادله که $p(x) = 0$ باشد و $p(x)$ یك پولینومیل غیر ثابت باشد چنین حل میشود :

**مثال ١٧ :**

در معادله $x^2 - 2x + 2 = 0$ ، در یافت کنید که حل این معادله ، $(1+i)$ ..... است؟

| $x^2 - 2x + 2 = 0$ | |
|---|---|
| $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2$ | $0$ |
| $1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2$ | |
| $1 + 2i - 1 - 2 - 2i + 2$ | |
| $0$ | |

حل است $x = (1+i)$

تمرینات :

معلوم کنید که $(i-1)$ حل معادله است ..... معادله .........ـه $x^2 - 2x + 2$

## ذ : مساوات برای اعداد کمپلکس :

معادله $(a + bi = c + di)$ صحت است ، مشروط بر آنکه جز حقیقی و جز موهوم

باهم در هر دو طرف مساوات ــ مساوی باشند . به عباره دیگر ،

اگر $a + bi = c + di$ باشد ، $a = c , b = d$ میشود .

**مثال ۱۸ :**

در معادله $3x + yi = 5x + 1 + 2i$ قیمت y و x را معلوم کنید ؟

حل : جز حقیقی هر دو طرف مساوات را مساوی قرار میدهیم . درینصورت در هر دو طرف مساوات جز های موهوم نیزباهم مساوی میشوند .

یعنی

$$3x + yi = 5x + 1 + 2i .$$

$3x = 5x + 1$ ..... ( جز حقیقی )

$x = -\frac{1}{2}$ --------- جواب

$yi = 2i$ ................. ( جز موهوم )

$y = 2$ ------ جواب

---

تمرین : در معادله :

23. $3x + 1 + ( y + 2 ) i = 2x + 2yi$

$x = ? \ , y = ?$ ------- جواب

22. تحقیق کنید که $1-i$ حل معادله $x^2 - 2x + 2 = 0$ است ؟

**و : مزدوج ها و عملیه تقسیم :**

مزدوج یك عدد کمپلکس چنین تعریف میشود :

تعریف : مزدوج عدد مختلط $a + bi$ ، عبارت است از $a - bi$ ، و مزدوج $a - bi$ عبارت است از $a + bi$ می

$(a < b)$ است . و درین حالت هر گاه ، عدد a را از عدد b تفریق نمائیم جواب آن یك عدد مثبت میشود . جهت مقایسه اعداد از نگاه بزرگی و کوچکی ، از علامهء غیر مساوات (>) استفاده می نمائیم . سیمبول (<) برای مفهوم کلانتر و سیمبول (>) برای مفهوم خورد تر بکار میرود.

**تعریف :** برای هر عدد حقیقی a ، و b ، :

$a<b$ .... ( a از b خورد تر است )

اگر ..... قیمت $b-a$ مثبت باشد .

مثال : غیر مساوات ذیل را با مفهوم علامهٔ « > » تشخیص و تحلیل کنید :

24. $2<8$ , $8-2=6$ ..................... (عدد 6 مثبت است )

25. $-4<9$ , $9-(-4)=13$ ................. (عدد13 مثبت است )

26. $-7<-5$ , $-5-(-7)=2$ ................. (عدد 2 مثبت است )

**تعریف :**

برای اعداد حقیقی a ، و b ، .... اگر $a>b$ باشد ....... ( a بزرگتر باشد ازb )

پس ....... $b<a$ است ..... ( b خورد تر است از a )

اگر ما نشان داده میتوانیم که $a>b$ ، ( a بزرگتر از b ) ... باشد .

پس $a-b$ عدد مثبت است .

---

**تمرین ( هـ )**

$-x$ ، و $-1 \times x$ را در صورت پیدا کنید که :

21. $x=6$ , 22. $x=-8$ , 23. $x=-3.4$ ............ باشد

24. .............. عکس جمعی ==> $-(x^2-3x)=?$

در صورتیکه $x=2$ , $x=-1$ باشند .

به همین منوال :

مزدوج ..............$3+4i$ عبارت است از $3-4i$ .

مزدوج ..............$5-7i$ عبارت است از $5+7i$ .

مزدوج ....................6 عبارت است از 6 .

---

تمرین : مزدوج هر کدام را دریافت کنید :

24. $7+2i$ 25. $6-4i$

26. $-5i$ 27. $3i$

28. $-3$ 29. $8$

---

**عملیه تقسیم :**

در تقسیم اعداد کمپلکس از مزدوج ها زیاد تر استفاده میشود .

مثال ۱۹ :

$4+5i \div 1+4i = ?$

$$\frac{4+5i}{1+4i} = \frac{4+5i}{1+4i} \times \frac{1-4i}{1-4i} = \frac{(4+5i)(1-4i)}{1^2-4^2 i^2} = \frac{24-11i}{17} =$$

$$\frac{24-11i}{17} \text{-----------}\rightarrow = \frac{24}{17} - \frac{11}{17} i$$

---

تمرین : تقسیم نمائید :

30. $\dfrac{1+3i}{3+2i}$ 31. $\dfrac{2+i}{3-2i}$

## ز : معکوس عدد کمپلکس :

معکوس یك عدد مختلط ، یك ، بر همان عدد است .

**مثال ۲۰ :** معکوس $2-3i$ را دریافت کرده و به شکل $a+bi$ تحریر کنید .

معکوس $2-3i$ ،

عبارت است از : $1/(2-3i)$ ، و به شکل $a+bi$ نیز در آورده میتوانیم :

---

تمرین : (32)

معکوس این معادله .......... $(3+4i)$ ، را به شکل $a+bi$ تحریر کنید .

---

(۳۰) ...

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{2^2-3^2i^2} = \frac{2+3i}{4+9}$$

$$= \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

## ح : معادلات خط مستقیم :

در حل معادلات خط مستقیم با اعداد کمپلکس ، تمام قواعد الجبری که در معادلات خطی غیر مختلط قابل تطبیق اند ، مراعات میگردد .

مثال ۲۱ :

$$3ix + 4 - 5i = (1+i)x + 2i$$

$$3ix - (1+i)x = 2i - (4-5i)$$

$$(-1+2i)x = -4+7i$$

$$x = \frac{-4+7i}{-1+2i}$$

$$x = \frac{-4+7i}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i}$$

$$x = \frac{18+i}{5} = \frac{18}{5} + \frac{1}{5} i$$

تمرین : حل کنید : - .33

$$3 - 4i + 2ix = 3i - (1-i)x \quad , \quad x = ?$$

## تمرینات 2-4

تمرین 6 - 1 را به جنس (i) تبدیل کنید :

1. $\sqrt{-15}$
2. $\sqrt{-17}$
3. $\sqrt{-81}$
4. $\sqrt{-25}$
5. $-\sqrt{-12}$
6. $-\sqrt{-20}$

تمرین 20 - 7 را ساده سازید و جوابات را از جنس (i) بگذارید :

7. $\sqrt{-16}+\sqrt{-25}$
8. $\sqrt{-36}-\sqrt{-4}$
9. $\sqrt{-7}-\sqrt{10}$
10. $\sqrt{-5}+\sqrt{-7}$

11. $\sqrt{-5}\sqrt{-11}$

12. $\sqrt{-7}\sqrt{-8}$

13. $-\sqrt{-9}\sqrt{-7}$

14. $-\sqrt{-9}\sqrt{-7}$

15. $\dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt{-2}}$

16. $\dfrac{\sqrt{-7}}{-\sqrt{5}}$

17. $\dfrac{\sqrt{-9}}{-\sqrt{4}}$

18. $\dfrac{-\sqrt{25}}{\sqrt{-16}}$

19. $\dfrac{-\sqrt{-36}}{\sqrt{-9}}$

20. $\dfrac{\sqrt{-25}}{-\sqrt{-16}}$

تمرین 28 - 21 را ساده سازید :

21. $(2+3i)+(4+2i)$

22. $(5-2i)+(6+3i)$

23. $(4+3i)+(4-3i)$

24. $(2+3i)+(-2-3i)$

25. $(8+11i)-(6+7i)$

26. $(9-5i)-(4+2i)$

27. $2i-(4+3i)$

28. $3i-(5+2i)$

29. $(1+2i)(1+3i)$

30. $(1+4i)(1-3i)$

31. $(1+2i)(1-3i)$

32. $(2+3i)(2-3i)$

33. $3i(4+2i)$

34. $5i(3-4i)$

35. $(2+3i)^2$

36. $(3-2i)^2$

37. $i^{13}$

38. $i^{72}$

فیکتور نمائید :

39. $4x^2 + 25y^2$

40. $16a^2 + 49b^2$

41. آیا حل : $x^2 - 2x + 5 = 0$ ، $1 + 2i$ است یا خیر ؟

42. آیا حل $x - 2x + 5 = 0$ ، $1 - 2i$ است یا خیر ؟

از تمرین 43 الی 44 برای x ، و y حل کنید :

43. $4x + 7i = -6 + yi$

44. $-4 + (x + y)i = 2x - 5y + 5i$

از 45 الی 60 بشکل $a + bi$ تبدیل کنید :

45. $\dfrac{4 + 3i}{1 - i}$

46. $\dfrac{2 - 3i}{5 - 4i}$

47. $\dfrac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i}$

48. $\dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$

49. $\dfrac{3 + 2i}{i}$

50. $\dfrac{2 + 3i}{i}$

51. $\dfrac{i}{2 + i}$

52. $\dfrac{3}{5 - 11i}$

53. $\frac{1-i}{(1+i)^2}$

54. $\frac{1+i}{(1-i)^2}$

55. $\frac{3-4i}{(2+i)(3-2i)}$

56. $\frac{(4-i)(5+i)}{(6-5i)(7-2i)}$

57. $\frac{1+i}{1-i} \times \frac{2-i}{1-i}$

58. $\frac{1-i}{1+i} \times \frac{2+i}{1+i}$

59. $\frac{3+2i}{1-i} + \frac{6+2i}{1-i}$

60. $\frac{4-2i}{1+i} + \frac{2-5i}{1+i}$

از 68 - 61 معکوس آنرا دریافت کرده و به شکل $a + bi$ درآورید .

61. $4+3i$

62. $4-3i$

63. $5-2i$

64. $2+5i$

65. $i$

66. $-i$

67. $-4i$

68. $5i$

حل کنید :

69. $(3+i)x+i=5i$

70. $(2+i)x-i=5+i$

71. $2ix+5-4i=(2+3i)x-2i$

72. $5ix+3+2i=(3-2i)x+3i$

73. $(1+2i)x+3-2i=4-5i+3ix$

74. $(1-2i)x+2-3i=5-4i+2x$

75. $(5+i)x+1-3i=(2-3i)x+2-i$

76. $(5-i)x+2-3i=(3-2i)x+3-i$

-77 نشان بدهید که این قاعده عمومی جذر که در مورد ، اعداد حقیقی تطبیق میشود ، در مورد اعداد کمپلکس ، صدق نمیکند .

77. $\sqrt{a \times b}=\sqrt{a} \times \sqrt{b}$

-78 نشان بدهید که این قاعده عمومی جذر که در اعداد حقیقی صحت است ، در مورد اعداد مختلط صدق نمیکند .

78. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

جهت ارایه اعداد کمپلکس یك حرف را بکار برده میتوانیم . بطور مثال ، $a+bi$ را به حرف $Z$ نشان میدهیم و مزدوج این عدد را به $\bar{Z}$ .

بعباره دیگر ، مزدوج $a+bi$ عبارت است از $a-bi$ --> ( $a-bi=\overline{a+bi}$ ) یا $\bar{Z}$ مزدوج است . با در نظر داشت تعریفات فوق مشخصات مزدوج های ذیل را ثبوت کنید:

-79 برای هر عدد مختلط $Z$ ، $Z \times \bar{Z}$ ، یك عدد حقیقی است .

-80 برای هر عدد کمپلکس $Z$ ، $Z+\bar{Z}$ یك عدد حقیقی است .

-81 برای هر عدد مختلط $W$ و $Z$ ، $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ است .

-82 برای هر عدد کمپلکس $w.z$ ، $\overline{z \times w}=\bar{Z} \times \bar{w}$ .

-83 برای هر عدد مختلط $Z$ ، $\overline{Z^n} = \bar{Z}^n$ است . در صورتیکه $n$ عدد طبیعی باشد .

84- اگر z یك عدد حقیقی باشد ، پس $\bar{z} = z$ است .

85- با استفاده از ثبوت های فقره های 84 - 79 ، یك پولونیومل را به ارتباط $\bar{z}$ در یافت کنید که مزدوج $3z^5 - 4z^2 + 3z - 5$ باشد .

86- حل نمایید : $z + 6\bar{z} = 7$ .

87- حل نمایید : $5z - 4\bar{z} = 7 + 8i$ .

89- اگر $Z = a + bi$ باشد ، $(1/2)i(z - \bar{z}) = ?$

حل نمایید :

90. $Z^2 = -2i$ , اگر $(Z = a + bi)$

91. $\dfrac{Z^2}{4} = i$ , اگر $(Z = a + bi)$

92. $Z = a + bi$ , $\dfrac{I}{Z} = ?$

93. $Z = a + bi$ و $W = c + di$ , $\dfrac{w}{z} = ?$

# معادله درجه دوم

**اهداف :**

با تکمیل کردن این بخش شما قادر خواهید شد که :

1 _ معادلات درجه دوم را حل نمایید :

الف : با گرفتن جذر مربع از هر دو طرف .

ب : با طریقه تکمیل — مربع .

ج : با استفاده از فورمول عمومی معادله درجه دوم .

2 _ تشکیل معادلات درجه دوم که حل های مشخص داشته میباشند .

---

## حل معادله درجه دوم :

معادلات ، پولونوميل $P(X) = 0$ را بنام معادله درجه دوم ( Quadratic ) یاد میکنند ، در صورتیکه درجه آن دو باشد . شکل اساسی ( Standard form ) معادله درجه دوم عبارت است از :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

که $a, b, c$ اعداد حقیقی میباشند .

ضریب های $b$ و $c$ میتواند صفر باشد اما ضریب $a$ هیچ وقت صفر شده نمیتواند ، زیرا اگر $a$ مساوی صفر شود ، در آنصورت معادله درجه دوم نخواهد بود .

معادلات درجه دوم را میتوان با عملیه های فیکتورینگ حل کرد ، اما طریقه های دیگر نیز موجود است که در این بحث تشریح میشود .

## حل معادله :

$$ax^2 = bx + c = 0$$

نخست ما معادلاتیرا مورد بحث قرار میدهیم که حد درجه اول (ضریب b صفر باشد)

آن موجود نباشد و آن عبارت است از $ax^2 + c = 0$ . این چنین معادلات با گرفتن جذر مربع از هر دو طرف مساوات حل میگردند .

برای فهمیدن این موضوع ، مراحل ذیل را طی می نماییم :

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

در اینجا ملاحظه میشود که x ، به یك طرف معادله و اعداد ثابت طرف دیگر معادله قرار دارند ، جهت ساده ساختن افاده ثابت را با حرف K تعویض مینماییم و به اساس فیکتور کردن معادله را حل مینماییم .

$$x^2 = k$$

$$x^2 - k = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{k})^2 = 0$$

$$(x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) = 0$$

$$x - \sqrt{k} = 0$$

$$x + \sqrt{k} = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{k} \qquad x_2 = \sqrt{k}.$$

از حل معادله فوق چنین نتیجه میگیریم که حل معادله دو جذر دارد یا دو جواب :

$$-\sqrt{k}\ ,\ \sqrt{k}$$

ضرب کنید :

25. $4\,(-6) = ?$ 26. $-7/5\,(-3/5) = ?$

27. $(-2)\,(-3)\,(-4)\,(-6) = ?$

تفریق کنید :

28. $2.5 - 1.2 = ?$ 29. $12 - (-5) = ?$

30. $-8/5 - 3/5 = ?$ 31. $-20 - (-7) = ?$

تقسیم کنید :

32. $-20/-5 = ?$ 33. $4.5 / -1.5 = ?$

34. $-4/5 \div 3/10 = ?$ 35. $-5/6 \div (-5/12) = ?$

---

## تمرینات ۱.۱ :

( الف )

اعداد ذیل را تحت غور بگیرید :

$-6\,,\ 0\,,\ 3\,,\ -1/2\,,\ \sqrt{3}\,,\ -2\,,\ -\sqrt{7}\,,\ \sqrt{2}\,,\ 5/8\,,\ 14\,,\ -9/4\,,\ 8.53\,,\ 9\,1/2$

1ـ کدام اعداد طبیعی اند ؟ 2ـ کدام اعداد مکمل اند ؟

3ـ کدام اعداد غیر ناطق ( غیر ریشنل ) اند ؟ 4ـ کدام اعداد ریشنل اند ؟

5ـ کدام اعداد ، اعداد( تام ) اند ؟ 6ـ کدام اعداد حقیقی اند ؟

( ب )

کدام یکی ناطق ( ریشنل )و کدام یك غیر ناطق (ایریشنل ) است :

7. $-6/5$ , 8. $-3/7$, 9. $-9.032$ ,

10. $3.14$ 11. $4.5\dot{1}65\overline{16}$ 12. $-7.3232\overline{32}$ ,

**مثال اول :**

$$5x^2 = 15 .$$

$$5x^2 = 15$$

$$x^2 = 3$$

$$x_1 = \sqrt{3} \qquad x_2 = -\sqrt{3}$$

---

**تمرین :** برای x حل کنید :

1. $x^2 = 3$
2. $5x^2 = 0$
3. $3x^2 = \pi$
4. $mx^2 = n$

---

بعضی اوقات ، جواب مطلوب را نمیتوانیم به شکل اعداد حقیقی بدست بیاوریم اما حل آن از طریق اعداد کمپلکس امکان پذیر میباشد .

مثال دوم :

$$4x^2 + 9 = 0$$

$$4x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -\frac{9}{4}$$

$$x = \sqrt{-\frac{9}{4}} \qquad x = -\sqrt{-\frac{9}{4}}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} i \qquad x_2 = -\frac{3}{2} i$$

تمرین : حل کنید :

5. $2x^2 + 1 = 0$

---

به صورت عموم ، معادله $x^2 = k$ دارای دو حل حقیقی میباشد :

آن هم در صورتیکه $k > 0$ باشد . اگر $k = 0$ باشد معادله فقط یك حل دارد که عبارت

است از صفر

و اگر $K < 0$ باشد ، معادله دو حل غیر حقیقی دارد .

**مثال سوم :**

$(x+5)^2 = 3$ .

$/x+5/ = \sqrt{3}$.

$x = -5 \pm \sqrt{3}$.

حل ................. $\{-5-\sqrt{3}, -5+\sqrt{3}\}$

---

تمرین حل کنید :

6. $(x+4)^2 = 7$

7. $(x-5)^2 = 3$

8. $(x+5)^2 = 4$

---

## حل تکمیل مربع :

اگر معادله به شکل $(x+h)^2 = k$ نباشد . این معادله را بطریقه « تکمیل مربع »

میتوانیم به این شکل تبدیل نماییم :

## مثال چارم :

معادله $x^2 - 6x - 12 = 0$ ، را بطریقه تکمیل مربع حل نمایید . ما نخست ، $x^2$ و حد های x را در نظر میگیریم :

« یك ترای نومیل مربع »را تشکیل میدهیم . اولاً توجه کنید که $x^2 - 6x + 9$ یك مربع مکمل است و میتواند این شکل $(x-3)^2$ را اختیار نماید . اگر ما عدد 9 را به $x^2 - 6x$ جمع و تفریق نماییم ، در آنصورت معادله تکمیل مربع بدست می آید . پس به $(x^2 - 6x) = 0$ $9 + 9-$ که عبارت از صفر است علاوه مینماییم .

$$x^2 - 6x + 9 - 9 - 12 = 0$$

$$(x-3)^2 - 21 = 0$$

$$(x-3)^2 = 21$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{21}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{21}$$

$$\{\underbrace{3+\sqrt{21}}_{x_1} \; , \underbrace{3-\sqrt{21}}_{x_2}\} \; ,$$

در ذیل طرز العمل عمومی ارایه میشود که بنام تکمیل مربع یاد میشود .

### <== حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، بطریقه تکمیل مربع :

1- اگر $a \neq 0$ ، هر دو طرف معادله را به $1/a$ ضرب میکنیم تا معادله شکل $x^2 + bx + c = 0$ را اختیار کند .

2- برای آنکه تکمیل مربع بالای $x^2 + bx$ تطبیق شود . ضریب $x(b)$ را به 2 تقسیم نموده ، مربع میسازیم و نتیجه را با معادلهٔ اولی جمع و تفریق مینماییم . . . . . یا... $(b/2)^2$

3- جذر مربع را میگیریم و برای x حل مینماییم :

**مثال 5 :** معادله $x^2 + 3x - 5 = 0$ را بطریقه تکمیل مربع حل کنید :

-1 $a = 1$ ، لذا معادله را به (1) تقسیم مینمائیم : یا $x^2 + 3x - 5 = 0$

-2 ضریب b را که عبارت از (3) است ، به 2 تقسیم نموده مربع میسازیم به معادله جمع و تفریق میکنیم .

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 5 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} .$$

-3 جذر مربع میگیریم :

$$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{29}{4}} = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$$

تمرین :

در اینجا ، خالیگاه ها را با عدد مکمل نمایید تا تکمیل مربع بدست بیاید .

9. $x^2 + 4x + \text{----------} = (\qquad)^2$

10. $x^2 - 6x + \text{----------} = (\qquad)^2$

11. $x^2 + 5x + \text{----------} = (\qquad)^2$

12. $x^2 - 7x + \text{----------} = (\qquad)^2$

13. $x^2 + \frac{3}{4}x + \text{———} = (\qquad)^2$

14. $x^2 - x + \text{----------} = (\qquad)^2$

این تمرین ها را با طریقه تکمیل مربع حل نمایید :

15. $x^2 + 4x - 3 = 0$

16. $x^2 - 6x + 8 = 0$

17. $x^2 - 5x + 6 = 0$

---

مثال 6 :

معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ را بطریقه تکمیل مربع حل کنید .

1- چون $a = 2$ است ، لذا ، ............ ما هر دو طرف معادله را به $1/a$ یا $(1/2)$

که ضریب $x^2$ است ، ضرب مینمائیم :

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$a \neq 1 \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \text{ - - - - - } (1)$$

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

به $\left(\frac{1}{2}\right)$ ضرب مینمایم . $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ ...(الف)

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

ضریب b مساوی به $3/2 -$ است آنرا به 2 تقسیم و مربع مینمائیم .

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{2}\right)^2 \Longrightarrow \frac{9}{16} \text{ - - - - - - } (2)$$

9/16 را به معادله اولی جمع و تفریق میکنیم : . . . (الف)

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{16} = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16} .$$

جذور معادله .... $\left\{ \frac{3-\sqrt{17}}{4} , \frac{3+\sqrt{17}}{4} \right\}$

$$x - \frac{3}{4} = \pm\sqrt{\frac{17}{16}} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

این تمرین ها را با طریقه تکمیل مربع حل کنید :

18. $2x^2 + 2x - 3 = 0$

19. $4x^2 + 3x - 1 = 0$

---

**فورمول حل معادله درجه دوم :**

ما طریقه تکمیل مربع را بدو منظور مطالعه کردیم ، یکی انکه این وسیله مهم خوب تر ذهن نشین شود ، و دیگر انکه به این طریقه میتوان فورمول عمومی حل معادله درجه دوم را بدست آورد . این فورمول بنام فورمول عمومی حل معادله درجه دوم (Quadratic formula) یاد میشود .

در استفاده ازین فورمول ، لازم است که نخست معادله را به شکل عمومی $ax^2 + bx + c = 0$ در آورده بعداً قیمت های ثابت و ضریب های b , c و a را تشخیص دهیم .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ .... هر دو طرف معادله را به 4a ضرب مینمائیم .

$4a^2x^2 + 4abx + (b^2 - b^2) + 4ac = 0$ $\quad (b^2 - b^2)$ بطرف چپ معادله جمع میکنیم .

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - (b^2 - 4ac) = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \longrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} .$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

---

**قضیه سوم :**

شکل عمومی معادله : $ax^2 + bx + c = 0$ بوده که حل آن

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

است

مثال ۷ :

معادله $3x^2 + 2x = 7$ را حل کنید .

نخست معادله را به شکل عمومی در آورده قیمت های $a, b, c$ را تشخیص میدهیم بعداً از « فورمول عمومی حل معادله درجه دوم » استفاده مینماییم .

$ax^2 + bx + c = 0$

$3x^2 + 2x = 7$

$3x^2 + 2x - 7 = 0$ , .............

$a = 3$ , $b = 2$ , $c = -7$ ............... قیمت ثابت ها

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times (-7)}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 84}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{88}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 22}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{22}}{6} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{22})}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{22}}{3} .$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{22}}{3} \cong \frac{-1 + 4.69}{3} \cong \frac{3.69}{3} \cong 1.2$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{22}}{2} \cong \frac{-1 - 4.69}{3} \cong \frac{-5.69}{3} \cong -1.9 .$$

مثال ۸ :

معادله $x^2 + x + 1 = 0$ را حل نمایید :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$a = 1 \; , \; b = 1 \; , \; c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

حل معادله درجه دوم عموماً از طریق فورمول عمومی صورت میگیرد . اما حل آن معادلات که جواب غیر ناطق دارند از طریق فورمول فیکتور کردن ناممکن است ، لذا یك قاعدهٔ عمومی جهت حل معادلات درجه دوم در ذیل ارایه میگردد :

۱ــ از طریق فیکتورینگ .

۲ــ اگر فیکتورینگ عملی نباشد از فورمول عمومی استفاده نمایید .

---

**تمرین :**

معادلات را حل کنید .

20. $2x^2 + 7x = 4$

21. $5x^2 - 8x = 3$

22. $x^2 - x + 2 = 0$

---

**( ب ) دلتا ( $\Delta$ ) :**

از فورمول عمومی ما میدانیم که ، جذر های $x_1$ و $x_2$ که حل معادله اند قرار ذیل نشان داده میشوند :

13. 4 . 303003000300003 ..........   14. 6 . 414114111411114 .........

15. $\sqrt{6}$   16. $\sqrt{7}$   17. $-\sqrt{14}$

18. $-\sqrt{12}$   19. $\sqrt{49}$   20. $-\sqrt{16}$

21. $\sqrt[3]{5}$   22. $\sqrt[4]{10}$

ii ساده سازید :

23. / 12 /   24. / − 2. 56 /   25. / − 47 /   26. / 0 /

دریافت کنید x − و 1x − را وقتیکه :

27. x = − 7   28. x = − 10/3   29. x = 57

30. x = 13/14

دریافت کنید : $-(x^2 - 5x + 3) = ?\ ,\ -(7 - y) = ?$

وقتیکه :

31. x = 12   32. x = − 8   33. y = − 9

34. y = 19

محاسبه کنید :

35. − 3.1 + ( − 7.2 )   36. − 735 + 319

37. 9/2 + ( − 3/5 )   38. − 6 + ( − 4 ) + ( − 10 )

39. − 7 ( − 4 )   40. − 8/3 ( − 9/2 )

41. ( − 8.2 ) 6   42. − 6 ( − 2 ) ( − 4 )

43. − 7 (−2) ( −3 ) (−5 )   44. ( − 7.1 ) ( − 2 . 3 )

45. −14/3 ( −17/5) (−21/2)   46. −13/4(−16/5) (23/2)

# بسم الله الرحمن الرحیم

## فصل اول : اساسات الجبر

### تعریف علم الجبر :

علم الجبر یك شعبه علم ریاضی است که بطور عموم در پایان مضمون حساب تدریس میگردد .

به عباره دیگر ، الجبر بخش دوم علم ریاضی را تشکیل میدهد. علم الجبر ابتداء در ممالك عربی بوجود آمد ولی بعدا پیشرفت سریع آن در ممالك دیگر صورت گرفت .

علم الجبر، خصوصیات اعداد و مقادیر را باحروف ( الفبا ) یا سیمبول ها نشان میدهد. در افاده های الجبری حروف ( الفبا ) به اساس فرضیه ها ـ مقدار اجناس را نشان میدهد.

الجبر اصلاً کلمهء عربی است به معنی "دوباره متحد شدن" باین ترتیب آل معادل: کلمه ( The انگلیسی ) است ـ ( چیز مشخص ) ، و جبر ـ به معنی دوباره باهم یکجا شدن قسمت های شکسته .

( الف ) :

### سیستم اعداد حقیقی

اهداف :

شما قادر خواهید شد که :

ـ اقسام مختلف اعداد حقیقی را بشناسید.

ـ قیمت مطلقه یك عدد حقیقی را نشان دهید.

ـ جمع ، تفریق ، ضرب ، و تقسیم اعداد حقیقی مثبت و منفی را اجرانمایید.، و جمع معکوس یك عدد حقیقی را در یافت کنید.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad . \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

در فورمول فوق ، افاده $b^2 - 4ac$ را بنام دلتا ( $\Delta$ ) یاد میکنند که حالت حل معادله را تعین میکند . چنانچه اگر قیمت ( $\Delta$ ) صفر باشد، در آنصورت نقش علامه مثبت و منفی از میان میرود . هر گاه ( $\Delta$ ) مثبت باشد . درآنصورت معادله دو جذر (دو حل) حقیقی دارد. و اگر ( $\Delta$ ) منفی باشد، در آنصورت هر دو جذر معادله اعداد موهوم میباشند که مزدوج یکدیگر نامیده میشوند .

### قضیه چارم :

– اگر $b^2 - 4ac = 0$ باشد ، معادلهٔ $ax^2 + bx + c$ یك جذر حقیقی دارد . یك حل دارد ( یا دو حل مساوی ) .

– اگر $b^2 - 4ac > 0$ باشد ، معادلهٔ $ax^2 + bx + c$ دو جذر مختلف حقیقی دارد .

– اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد ، معادله $ax^2 + bx + c$ دو جذر مختلف غیر حقیقی دارد که بنام اعداد ( موهوم مزدوج ) یاد میشوند .

### مثال ۹ :

حالت حل معادله $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را تعین کنید

در $9x^2 - 12x + 4 = 0$ ............ $a = 9 \ , \ b = -12 \ \ c = 4$

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\,(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

لذا معادله مذکور یك جذر حقیقی دارد .

### مثال ۱۰ :

حالت حل معادله $x^2 + 5x + 8 = 0$ را تعین کنید .

$$a = 1 \ , \ b = 5 \ \ c = 8$$

$$b^2 - 4ac = 25 - 32 = -7$$

چون ($\Delta$) منفی است، لذا معادلهٔ مذکور دو جذر غیر حقیقی دارد .

**مثال ۱۱ :**

حالت حل معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ را تعین کنید .

$a = 1 , b = 5 \; c = 6$

$b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$

چون ($\Delta$) مثبت است ، لذا معادله دو جذر حقیقی دارد .

---

تمرین : بدون حل ، حالت این معادلات را تشریح نمائید .

23. $x^2 + 5x - 3 = 0$

24. $9x^2 - 6x + 1 = 0$

25. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

---

ج : طرز نوشتن معادله از طریق جذر های آن :

با درنظر داشت اینکه حاصل ضرب دو فکتور صفر شود ، ما میدانیم که از فیکتورینگ $(x + 3)(x - 2) = 0$ حل معادله مذکور عبارت است از : 2 , 3-، پس اگر ما حل معادله ( جذر های معادله ) را داشته باشیم میتوانیم معادله را بدست بیاوریم .

**مثال ۱۲ :**

معادلهٔ را بنویسید که حل ها جذر های آن $-2i$ , $2i$ است .

$x_1 = 2i \quad , \quad x_2 = -2i$

$x - 2i = 0 \quad , \quad x + 2i = 0$

$$(x - 2i)(x + 2i) = 0$$

$$x^2 + 2ix - 2ix - (2i)^2 = x^2 - (2i)^2 = 0$$

$$x^2 + 4 = 0$$ ... جواب

**مثال ۱۳ :**

معادلهٔ را در یابید که جذر های آن 3 ، 2/5 - باشد .

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -\frac{2}{5}$$

$$x - 3 = 0 \qquad x + \frac{2}{5} = 0$$

$$(x-3)(x+\frac{2}{5}) = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{5}x - 3x - 3 \times \frac{2}{5} = 0$$

$= x^2 - \frac{13}{5}x - \frac{6}{5} = 0$ ,...... هر دو طرف معاذله را به 5 ضرب مینمائیم

معادله عبارت است از : $5x^2 - 13x - 6 = 0$

**مثال ١٤ :**

معادله را دریابید که حل آن $-2\sqrt{3}$ , $\sqrt{3}$ باشد .

$$x_1 = \sqrt{3} \qquad x_2 = -2\sqrt{3}$$

$$(x - \sqrt{3}) = 0 \qquad (x + 2\sqrt{3}) = 0$$

$$(x-\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})=0$$

$$x^2+2\sqrt{3}x-\sqrt{3}x-2(\sqrt{3})^2=0$$

معادله عبارت است از : .......... $x^2+\sqrt{3}x-6=0$

---

تمرین : معادله را پیدا کنید که جذر های آن عبارت اند از :

26. $-4 \quad , \dfrac{5}{3}$

27. $5i \quad , \quad -5i$

28. $-2\sqrt{2} \; , \sqrt{2}$

---

**تمرین : 5 - 2**

معادلات ذیل را از طریق تکمیل مربع حل کنید:

1. $4x^2 = 20$
2. $3x^2 = 21$
3. $10x^2 = 0$
4. $9x^2 = 0$
5. $2x^2 - 3 = 0$
6. $3x^2 - 7 = 0$
7. $2x^2 + 14 = 0$
8. $3x^2 + 15 = 0$
9. $ax^2 = b$
10. $\pi x^2 = k$
11. $(x-7)^2 = 5$
12. $(x+3)^2 = 2$
13. $\dfrac{4}{9}x^2 + 1 = 0$
14. $\dfrac{16}{25}x^2 - 1 = 0$

15. $(x-h)^2=a$

16. $y=a(x-h)^2+k$

این معادلات را به طریقه تکمیل مربع حل نمائید:

17. $x^2+6x+4=0$

18. $x^2-6x-4=0$

19. $y^2+7y-30=0$

20. $y^2-7y-30=0$

21. $5x^2-4x-2=0$

22. $12y^2-14y+3=0$

23. $2x^2+7x-15=0$

24. $9x^2-3x=-25$

این معادلات را با فورمول حل کنید :

25. $x^2+4x=5$

26. $x^2=2x+15$

27. $2y^2-3y-2=0$

28. $5m^2+3m-2=0$

29. $3t^2+8t+3=0$

30. $3u^2=18u-6$

31. $3+u^2 \quad 12u$

32. $40+30p+5p^2=0$

33. $x^2-x+1=0$

34. $x^2+x+2=0$

35. $x^2+13=4x$

36. $2x+1=-5x^2$

حالت این معادله ها را تعین کنید :

37. $x^2-6x+9=0$

38. $x^2+10x+25=0$

39. $x^2+7=0$

40. $x^2+2=0$

41. $x^2-2=0$

42. $x^2-5=0$

43. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

44. $4x^2 + 8x - 5 = 0$

45. $x^2 - 2x + 4 = 0$

46. $x^2 + 3x + 4 = 0$

47. $9t^2 - 3t = 0$

48. $4m^2 + 7m = 0$

49. $y^2 = \frac{1}{2} y + \frac{3}{5}$

50. $y^2 + \frac{9}{4} = 4y$

51. $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

52. $6y^2 - 2\sqrt{3}y - 1 = 0$

معادلاتی را بنویسید که حل آنها عبارت است از :

53. $-11 , 9$

54. $-4 , 4$

55. $7 ,$

56. $-\frac{2}{3}$

57. $-\frac{2}{5} , \frac{6}{5}$

58. $-\frac{1}{4} , -\frac{1}{2}$

59. $\frac{c}{2} , \frac{d}{2}$

60. $\frac{k}{3} , \frac{m}{4}$

61. $\sqrt{2} , 3\sqrt{2}$

62. $-\sqrt{3} , 2\sqrt{3}$

63. $3i , -3i$

64. $4i , -4i$

این مثال ها را حل نمایید :

65. $x^2 - 0.75x - 0.5 = 0$

66. $5.33x^2 - 8.23x - 3.24 = 0$

67. $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$

68. $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$

69. $t^2 + 0.2t - 0.3 = 0$

70. $p^2 + 0,3p - 0.2 = 0$

71. $x^2 + x - \sqrt{2} = 0$

72. $x^2 - x - \sqrt{3} = 0$

73. $x + \sqrt{5}x - \sqrt{3} = 0$

74. $2x + \sqrt{3}x - \pi = 0$

75. $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0$

76. $\sqrt{2}x^2 + 5x + \sqrt{2} = 0$

77. $(2t - 3)^2 + 17t = 15$

78. $2y^2 - (y + 2)(y - 3) = 12$

79. $(x + 3)(x - 2) = 2(x + 11)$

80. $9t(t + 2) - 3t(t - 2) = 2(t + 4)(t + 6)$

81. $2x^2 + (x - 4)^2 = 5x(x - 4) + 24$

82. $(c + 2)^2 + (c - 2)(c + 2) = 44 + (c - 2)^2$

هر کدام را ثبوت کنید :

83 - الف) مجموع جذور معادله $ax^2 + bx + c$ مساوی به $(-b/a)$ است .

ب) حاصل ضرب جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مساوی به $(c/a)$ است .

در معادله نخست قیمت k را دریافت نمائید ، بعداً معادله را حل کنید .

84. $kx^2 - 17x + 33 = 0$.......................... یك حل معادله 3 است .

85. $kx^2 - 2x + k = 0$.......................... یك حل معادله $-3$ است .

86. $x^2 - kx + 2 = 0$.......................... یك حل معادله $1 + i$ است .

87. $x^2 - (6+3i)x\,k = 0$ ........................ یك حل معادله 3 است .

88. $kx^2 - 4x + (2k-1) = 0$ قیمت $K$ را در صورتی پیدا کنید که حاصل ضرب جذور 3 باشد .

89 - معادله را دریافت کنید که مجموع جذور آن 3 / و حاصل ضرب آن 8 باشند.

90- معادله را دریافت کنید که جذور آن در ذیل داده شده اند :

( الف )

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

( ب )

$$\frac{g}{h}, \frac{-h}{g}$$

( ج )

$2-5i \, , \, 2+5i$

91- در معادله : $3x^2 - hx + 4k = 0$ قیمت های h و k را در صورتی دریافت کنید که مجموع جذور معادله (12 -) ، و حاصل ضرب جذور معادله (20) باشند ؟

92- یك حل معادله : $p(q-r)y^2 + q(r-p)y + r(p-q) = 0$ ، مساوی است به (2) ، حل دیگر آنرا پیدا کنید ؟

93- مجموع مربع جذور این معادله « $x^2 + 2kx - 5 = 0$ » مساوی به 26 است ، قیمت مطلقه k را دریافت کنید ؟

94- ثبوت کنید که جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ معکوس جذور معادله ذیل میباشند:

$$cx^2 + bx + a = 0$$
$$a \neq 0 \quad , \quad c \neq 0$$

## حاصل ضرب و حاصل جمع جذور معادله درجه دوم : $ax^2 + bx + c = 0$ :

۱ــ حاصل ضرب جذور معادله دوم مساوی است به $(c/a)$ ، که طور ذیل بدست می آید :

$$(x_1)(x_2) = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

۲ــ حاصل جمع جذور معادله درجه دوم مساوی است به $(-b/a)$ که طور ذیل بدست می آید :

$$x_1 + x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

## 6_2 فورمولها و حل پرابلم

**اهداف :**

با تکمیل کردن این بخش شما قادر خواهید شد که :

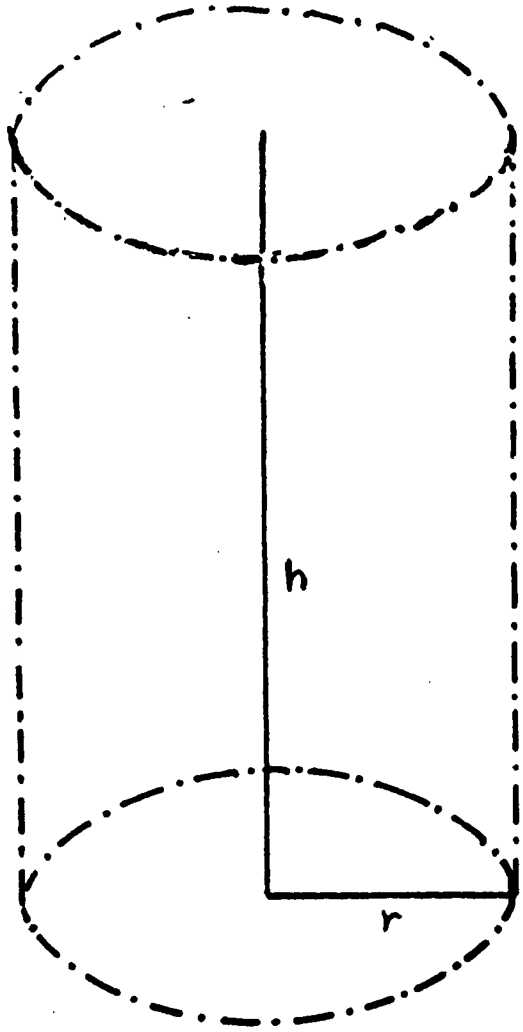
– فورمول را از جنس یك حرف حل نمائید .

– پرابلم های تطبیقی که ذریعه فورمول درجه دوم حل میشود ، عملی مینمائید .

---

**فورمولها :**

برای انکه یك فورمول را از جنس یك حرف مشخص حل نمائیم ، از قواعد حل ستفاده مینمائیم . در قواعد حل معادلات ما به خاطر داریم که عملیه های جمع ، تفریق ، ضرب و یا تقسیم را به هر دو طرف معادله تطبیق مینمائیم .




مثال اول :

برای r حل کنید . . . . . $V = \pi r^2 h$ ( حجم استوانه )

برای r حل کنید

$$V = \pi r^2 h \; ,$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$\frac{V}{\pi h} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{V}{\pi h}} = r$$

47. −20/−4

48. 49/−7

49. −10/70

50. −40/8

51. 2/7 ÷ ( − 14/3 )

52. − 3/5 ÷ ( − 6/7 )

53. −10/3 ÷ (− 2/15)

54. − 12/5 ÷ ( − 0.3 )

55. 11 − 15

56. − 12 − 17

57. 12 − ( − 6 )

58. − 13 − ( − 4 )

59. 15.8 − 27.4

60. − 19.04 − 15.76

61. −21/4 − ( − 7/4 )

62. 10/3 − ( − 17/3 )

این علامه نشان میدهد که محاسبه ذریعه کلکو لیتر اجراء شود .

63. a) $(1.4)^2$

$(1.41)^2$

$(1.414)^2$

$(1.4142)^2$

$(1.41421)^2$

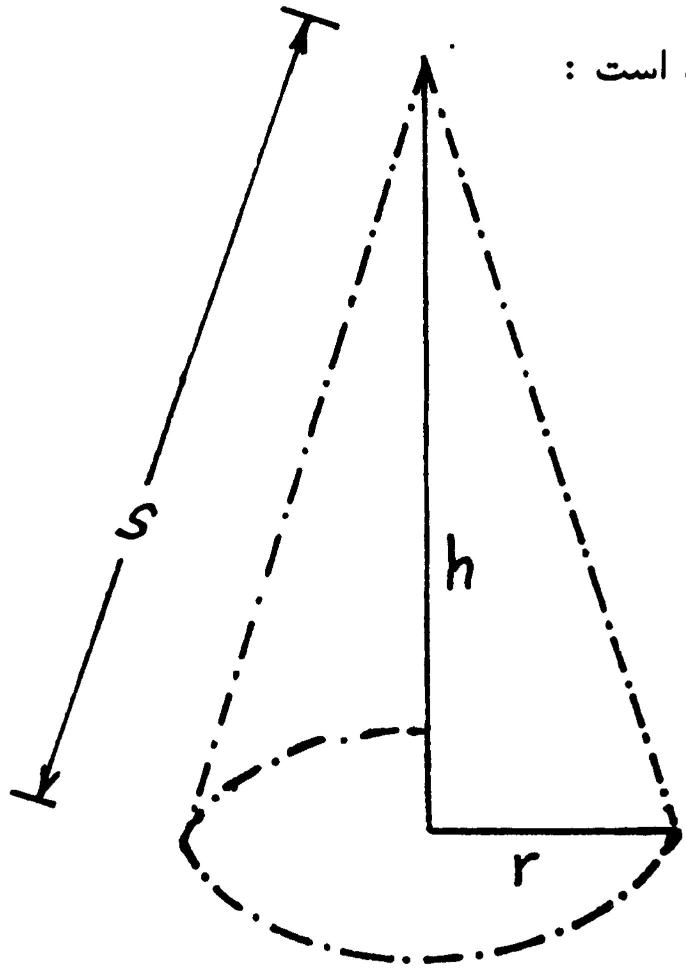
64. a) $(2.1)^3$

$(2.15)^3$

$(2.154)^3$

$(2.1544)^3$

$(2.15443)^3$




1.

تمرین : حجم مخروط داده شده است :

$$( V = \frac{1}{3} \pi r^2 h )$$ ______

برای r حل کنید :

---

مثال دوم : معادله را برای r حل کنید :

$A = \pi r s + \pi r^2$ .......... مساحت سطحی مخروط (شکل بالا)

$$\pi r^2 + \pi rs - A = 0 .$$

$$a = \pi , b = \pi s \ , \ c = - A .$$

$$r = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{- \pi s \pm \sqrt{( \Pi s )^2 - 4 \times \pi ( - A )}}{2\pi}$$

$$r_1 = \frac{-\pi s - \sqrt{\pi^2 s^2 + 4\pi A}}{2\pi}$$

$$r_2 = \frac{-\pi s + \sqrt{\pi^2 s^2 + 4\pi A}}{2\pi}$$

مثال از ربح مرکب :

۳ــ مبلغ 2560$ به مفاد سالانه ( i ) به ربح مرکب گذاشته شده است بعد از مدت 2 سال سرمایه به 3240$ بالغ میگردد . نرخ فایده را معلوم کنید .

$$A = P(1+i)^t$$

$$3240 = 2560(1+i)^2$$

$$\frac{3240}{3560} = (1+i)^2$$

$$\sqrt{\frac{324}{256}} = [1+i]$$

$$\pm\frac{18}{16} = 1 + i$$

$-1 - \frac{18}{16} = i_1$ یا $-1 + \frac{18}{16} = i_2$ $\qquad \frac{2}{16} = i_2$

$-\frac{34}{16} = i_1$ ................... جواب منفی غلط است

جواب ..... $i_2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$

---

**تمرین** : معادله $(S = 16t^2 + v_0 t)$ را برای t حل کنید .

3. مبلغ $2560 در بانك به ربح مركب به مفاد (i) سالانه گذاشته است سرمایه در بانك، بعد از مدت دو سال مبلغ $3610 میشود مفاد (i) را دریافت کنید .

---

**مثال ٤ :**

یك زینه که طول آن 10 فت است به یك دیوار تکیه دارد . قاعدهٔ زینه از دیوار 6ft فاصله دارد . بعداً قاعده زینه به اندازه 3ft بیشتر ، از دیوار کش میشود شما معلوم کنید که راس زینه چقدر پایین می آید ؟

قیمت h را در (2) تعویض کنید .

در مثلث قایم الزاویه PQR داریم :

$h^2 + 6^2 = 10^2$ ................................ (1)

$(h - d)^2 + 9^2 = 10^2$ ...................... (2) ........ MNR در مثلث قایم الزاویه

$h = 8$ .......................................... (1) از معادله

$(8 - d)^2 + 9^2 = 10^2$ .

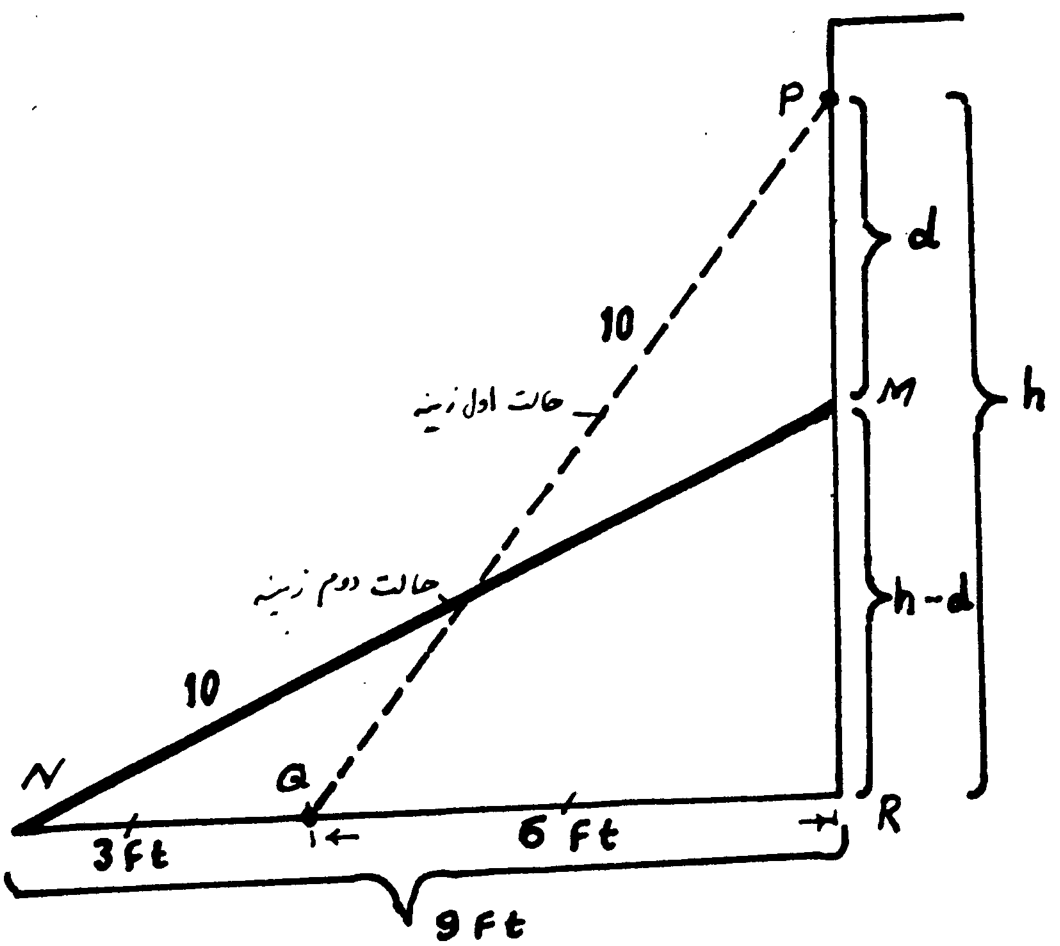
$d^2 - 16d + 45 = 0$

$$d = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{2} = \frac{16 \pm 2\sqrt{19}}{2} = 8 \pm \sqrt{19}.$$

$d = 8 \pm \sqrt{19}$ $\qquad d_2 \Longrightarrow \cong 8 - 4.359 \cong 3.641$ ft. ص

$d_1 \cong 8 + 4.359$

$\cong 12.359$ (این جواب منطق ندارد)




---

(1) فورمول سقوط آزاد در سیستم انگلیسی ( $g = 32ft/sec^2$ ) ، s --> فاصله به فت ، V --> سرعت اولی ، t --> وقت سقوط . ( $S = 1/2\,gt^2 + V_0t$ )

---

**تمرین : (4)**

یك زینه که طول آن 13ft است به دیوار تکیه دارد . قاعده زینه 5ft از دیوار دور میباشد . اگر قاعده زینه 4 فت دیگر از دیوار دور شود راس زینه چقدر پایین خواهدآمد ؟

---

در سقوط آزاد ، ارتفاع سقوط در ظرف t ثانیه با فورمول ذیل ارایه میگردد :

( s به میتر ) $S = 4.9t^2 + v_0 t$............. ، درین فورمول ، V سرعت اولی میباشد .

و s مسافه به متر . ( سیستم متر یك ) $g = 9.8\ m/sec^2$

**مثال 5 :**

(الف) یك شی از بالای یك کمان که ارتفاع آن 195 متر است رها میشود . بعد از چقدر وقت بزمین میرسد ؟

چون ، جسم بسرعت صفر سقوط میکند ، لذا قیمت ها را در معادله اولی وضع مینمائیم← $S = 4.9t^2 + V_0 t$

$$195 = 4.9t^2 + 0 \times t$$

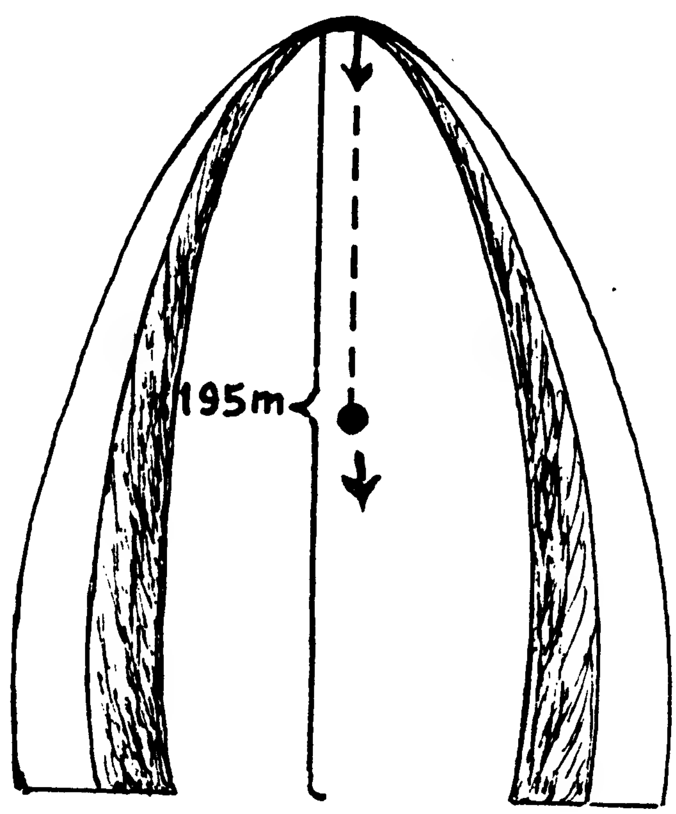
$$195 = 4.9t^2$$

$$t^2 = 39.8$$

$$t = \sqrt{39.8} \cong 6.31 .$$

$$t = 6.31''$$

t = 6.31 (ثانیه) جواب



( ب ) اگر جسم به سرعت 16m / sec طرف زمین رها شود ، وقت تصادم بزمین چنین محاسبه میشود : . $V_0 = 16m / sec$

$$195 = 4.9t^2 + 16t$$

$$0 = 4.9t^2 + 16t - 195 .$$

$t_1 = -8.15$ یا $t_2 = 4.88$ ۳......... ( بعد از این وقت بزمین میرسد )

( ج ) اگر جسم مذکور به سرعت اولی 16m / sec رها شود ، بعد از 3 دقیقه چقدر مسافه را طی میکند . $V_0 = 16m / sec$

$$S = 4.9t^2 + V_0 t$$

$$= 4.9 ( 3 ) + 16 ( 3 ) = 92.1 \text{ meter}$$

مسافه که جسم در ظرف 3 ثانیه طی میکند 92.1 متر میشود .

---

## تمرین ٦ _ ٣

الف : فورمولهای ذیل را از جنس یك حرف مشخص حل نمائید .

1. $F = \dfrac{KM_1 M_2}{d^2}$ , $d = ?$
2. $E = mc^2$ $c = ?$
3. $S = \dfrac{1}{2} at^2$ , $t = ?$
4. $V = 4\pi r^2$, $r = ?$
5. $S = -16t^2 + V_0 t$, $t = ?$
6. $A = 2\pi r^2 + 3\pi rh$ , $r = ?$

7. $d = \dfrac{n^2 - 3n}{2}$ , $n = ?$ 8. $\sqrt{2}t^2 + 3k = \pi t$ , $t = ?$

9. $A = P(1+i)^2$ , $i = ?$ 10. $A = p[1+\dfrac{i}{2}]^2$ , $i = ?$

ب : نرخ مفاد چند است،اگر به ربح مرکب سالانه سرمایه گذاری شده باشد .

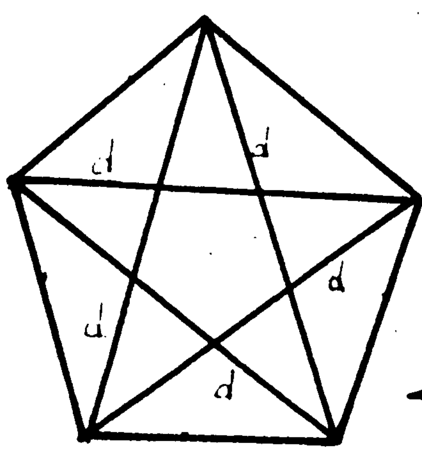
-11 مبلغ 5120 $ بعد از مدت دو سال به 7220 $ میرسد . $i = ?$

-12 مبلغ 1000 $ بعد از مدت دو سال به 1210 $ میرسد . $i = ?$

-13 8000 $ بعد از مدت دو سال به 9856.80 $ میرسد . $i = ?$

-14 1000 $ بعد از مدت دو سال به 1271.26 $ میرسد . $i = ?$

## تعداد قطرهای یک مضلع d <===




( شکل a مربوطه پرابلم ( 15←16 ) ....... ←

تعداد قطر های یک کثیرالاضلاع دارای n ضلع ، با فورمول ...... $d = (n^2 - 3n)/2$ ارایه میشود :

درین فورمول : تعداد قطر <=== d

تعداد اضلاع <=== n

15- یك کثیرالاضلاع دارای 27 قطر میباشد تعداد اضلاع آن چند است .

16- یك کثیر الاضلاح دارای 44 قطر میباشد تعداد اضلاع آن چند است ؟

17- یك زینه که طول آن 10ft است به یك دیوار تکیه دارد. قاعده زینه از دیوار به اندازه 6ft دور است قاعده زینه چقدر کش شود که رأس زینه بهمان اندازه پایین بیاید ؟

18- یك زینه 13 فت به یك دیوار تکیه دارد. قاعدهٔ زینه از دیوار به اندازه 5 فت دوراست قاعدهٔ زینه چقدرکش شود که سر زینه به همان اندازه پایین بیاید ؟

19- مساحت یك مثلث $18\ cm^2$ میباشد.قاعده آن از ارتفاع اش به اندازه 3cm طویلتر است . ارتفاع مثلث چند است ؟

20- ضلع یك مربع 90ft است . قطر مربع چند فت است .

21- دو ریل A ، و B یك شهر را به زاویه قایمه در یك وقت ترك میگویند . ریل B به اندازه 5mph از ریل A سریعتر میرود . بعد از 2 ساعت هر دو ریل 50 میل از همدیگر دور میشوند. سرعت هر ریل را معلوم کنید ؟

22- ریل A و ریل B یك شهر را به زاویه قایمه در عین وقت ترك میکنند . ریل A نظر به ریل B به اندازه 14km/h سریعتر میرود بعد از 5 ساعت به اندازه 130km از همدیگر دور اند . سرعت هر ریل را معلوم کنید ؟

23- (الف) یك جسم از یك طیاره که 75m ارتفاع دارد پایین رها (سقوط آزاد) شده است . بعد از چقدر وقت بزمین تصادم میکند ؟

ب : یك جسم از همین طیاره به سرعت اولی 30m / sec بطرف زمین پرتاب گردیده بعد از چقدر وقت بزمین میرسد ؟

ج : اگر همین جسم به سرعت 30m / sec . بطرف زمین پرتاب شود بعد از مدت 2 ثانیه چقدر فاصله را طی میکند ؟

24- الف : يك جسم از ارتفاع 500m از طياره رها شده است بعد از چقدر وقت بزمين ميرسد ؟ ( سقوط آزاد ).

ب : جسم بسرعت 30m / sec طرف زمين پرتاب گرديده بعد از چقدر وقت بزمين ميرسد ؟

ج : جسم بعد از 5 دقيقه به چقدر فاصله پايين مى آيد ، درصورتيكه اين جسم به سرعت 30m / sec . پرتاب شده باشد ؟

25- قطر يك مربع به اندازه 1.341 سانتى متر از ضلع آن طويلتر است . ضلع مربع را معلوم كنيد ؟

26- وتر يك مثلث قايم الزاويه ( 8.31cm ) سانتى متر است . مجموع طول هاى اضلاع قايم آن مثلث 10.23 سانتى متر است . طول هر ضلع چند است ؟

فورمول ذيل به حل پرابلم هاى 30 -- 27 كمك مينمايد .

$$T = C . N$$

قيمت هر جنس <=== c

قيمت مجموعى يك جنس <=== T

تعداد اجناس <=== N

27- يك گروپ از شاگردان در خريدارى كشتى كه قيمت آن 140 $ است شريك شدند . در اخر معامله ، 3 نفر شاگرد از شركت بر آمدند . كه اين وضع سهميه هر شاگرد را به 15 $ بالا برد . چند نفر در خريدارى كشتى شريك ميباشند ؟

28- يك تيكه دار چند نمره زمين را به مبلغ 8400 $ خريدارى نمود ، تمام نمرات بدون 4 نمره فروخته شدند . و قيمت فروش تمام نمره فروخته شده 8400 $ شد. قيمت فروش هر

نمره نظر به قیمت خرید، 350 $ زیاد تر است . شما معلوم کنید که اصلاً چند نمره زمین خریداری شده بود .

-29 یك تیکه داریك ملکیت را به 720 $ میخرد . اگر هر نمره زمین این ملکیت 15 $ ارزانتر خریداری میشد در آنصورت 4 نمره زمین زیاد تر بدست می آمد. جمله چند نمره زمین خریداری گردیده است .

-30 در یك هوتل برای مهمانی شاگردان 112 $ بمصرف میرسبد . اگر 14 شاگرد جدید در سهمیه مهمانی سهیم گردد . مصرف هر شاگرد به اندازه 4 $ کمتر میشود سهمیه هر شاگرد قبلاً چقدر بود ؟

به مقصد x حل نمایید .

-31 $kx^2 + (3-2k)x - 6 = 0$

-32 $x^2 - 2x + kx \cdot 1 = kx^2$

-33 $(m+n^2)x^2 + (m+n)x = 2$

-34 $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$ , (a) $x = ?$ , (b) $y = ?$

-35 در ربح مرکب سالانه نرخ فایده چند است ، در صورتیکه سرمایه در ظرف سه سال از 9826 $ به 13,704 $ افزایش یابد .

-36 یك مثلث متساوی الاضلاع در داخل د ایره که محیط آن $6\pi$ است طوری جاگزین شده که هر سه راس آن با محیط دایره در تماس اند . مساحت مثلث مذکوررا معلوم کنید .

-37 دو مثلث متساوی الاضلاع بالترتیب دارای اضلاع $a_1$ و $\frac{a}{2}$ میباشند . طول ضلع یك مثلث متساوی الاضلاع سوم $(a_3)$ را معلوم کنید که مساحت آن مثلث سوم مساوی به مجموع مساحت دو مثلث اولی باشد ؟

مشخصات هر جملهٔ ذیل چه مفهوم دارد ؟

65. $K + 0 = k$

66. $ax = xa$

67. $-1(x + y) = (-1x) + (-1y)$

68. $4 + (t + 6) + (4 + t) + 6$

69. $c + d = d + c$

70. $-67 \times 1 = -67$

71. $4(xy) = (4x)y$

72. $5(a + t) = 5a + 5t$

73. $y(1/y) = 1 , y == 0$

74. $-x + x = 0$

75. نشان بدهید که عملیه تفریق مبادلهٔ ( تغیر و تبدیل جای ) نیست ؟

75. $a - b \neq b - a$

76. نشان بدهید که عملیه تقسیم مبادلهٔ ( تغیر و تبدیل جای ) نیست .

77. نشان بدهید که عملیه تقسیم آمیز شی نیست .

78. نشان بدهید که عملیهٔ تفریق آمیزشی نیست .

79. با استفاده از تعریف قیمت مطلقه ، مفهوم اصطلاح $/x - 3/$ را تشریح و واضح نمایید .

برای انکه عدد متوالی را به کسر تبدیل نمائیم مثال ذیل را در نظر بگیرید :

عدد متوالی $8.97656565.............. \Longrightarrow 8.97\overline{65}$

اگر $\Longrightarrow n = 8.976565...............$ باشد

$$10,000n = 89765.6565...........$$

$$-\ 100n = 897.6565..............$$

تفریق کنید :

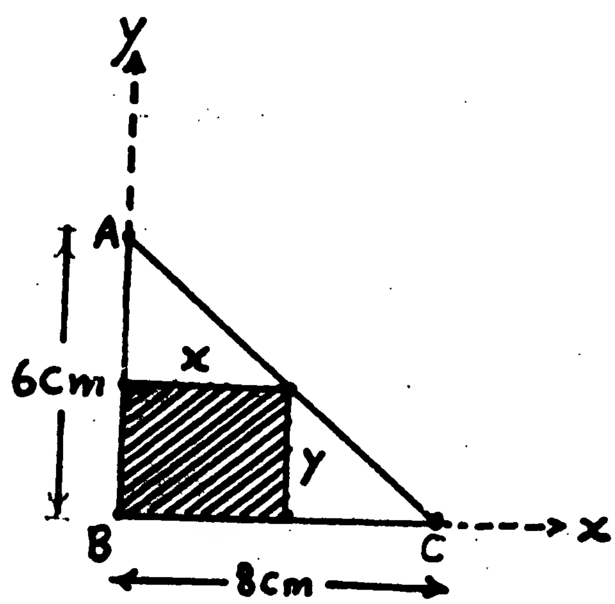
$$9,900n = 88,868 \ .............................$$

$$n = 88,868/9900$$

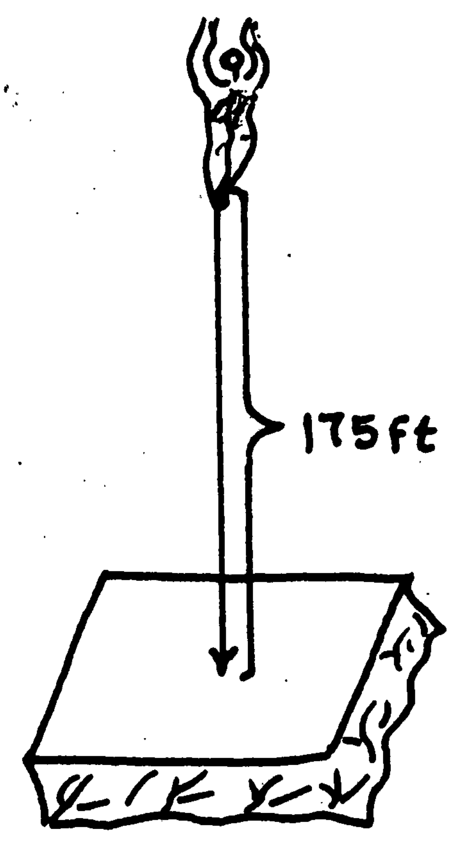
-38 اضلاع یك مثلث A ، 25ft ، 25ft . 30ft میباشند . اضلاع مثلث B همچنان : 40ft ، 25ft، 25 ft میباشند . کدام مثلث مساحت زیاد تر دارد ؟

-39 یك مستطیل که مساحت آن 12cm . میباشد ، در یك مثلث قایم الزاویه ABC که درشکل نشان داده شده جابجاگردیده، ابعاد مستطیل چنداست ؟

-40 « در یك ریکارد جهانی پرتاب آزاد بدون پاراشوت » ، یك خانم ریکارد 175ft ارتفاع را قایم کرد . وقت تقریبی این پرتاب آزاد چقدر بود ؟




. 39




. 40

# ۷ _ ۲ معادلات جذر دار

## حل معادلات جذر دار :

معادله جذر دار عبارت از آن معادله است که متحول های معادله تحت یك یا چندین جذر واقع باشد . بطور مثال :

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{4x - 7} = 2$$

برای حل این معادله طریقهٔ جدید را بکار میبریم :

**قضیه 5 :**

برای هر عدد ( n ) ، اگر رابطهٔ $a = b$ صحیح باشد ، پس رابطه :
$a^n = b^n$ نیز صحت است .

این موضوع قابل توجه است که در صورت تطبیق طریقه مربع ساختن هر دو طرف ، معادله جدیدی بدست میاید که معادل معادله اولی نمیباشد . بطور مثال : وقتیکه ما هر دو طرف معادله را مربع میسازیم . معادله بدست میاید که حل آن با معادلهای اولی مطابقت نمیکند .

بطور مثال : در معادله $x = 3$ .

این معادله یك حل دارد . و اگر هر دو طرف معادله را مربع سازیم معادله که بدست می آید عبارت است از :

$$x^2 = 9$$

که دو حل دارد $(3 , -3)$ .

یعنی معادله $x = 3$ و $x^2 = 9$ معادل یکدیگر نمیباشد .

یك مثال دیگر را در نظر میگیریم . (1) ............... $\sqrt{x} = -3$

هرگاه هر دو طرف معادله را مربع سازیم معادله که بدست می آید عبارت است از :

$(\sqrt{x})^2 = (-3)^2$ ، یا $x = 9$

ملاحظه میشود که عدد (9) در معادله (1) امتحان نمیشود .

مثال اول : معادله $x - 5 = \sqrt{x+7}$ را حل کنید .

$$x - 5 = \sqrt{x+7}$$

$$(x-5)^2 = (\sqrt{x+7})^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = x + 7$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$x_1 = 9$ یا $x_2 = 2$

از نتیجه فوق نمایان میشود که حل معادله (9) و (2) میباشد . هرگاه عدد (9) را در معادله اصلی تعویض نماییم . معادله قرار ذیل تکافو میشود .

اول 9 را در معادله تعویض مینماییم .

| $x - 5$ | $= \sqrt{x+7}$ |
|---|---|
| $9 - 5$ | $\sqrt{9+7}$ |
| 4 | 4 |

حال اگر عدد (2) که آن هم حل معادله میباشد ، در معادله اصلی تعویض نماییم دیده میشود که این قیمت صدق نمی کند . لهذا عدد (2) حل معادله نمیباشد .

(2 حل خارجی معادله است ) .

| $x - 5$ | $= \sqrt{x+7}$ |
|---|---|
| $2 - 5$ | $\sqrt{2+7}$ |
| $-3$ | 3 |

تمرین حل کنید : بعد از حل ، نتیجه را امتحان نمائید .

1. $\sqrt{2x} = -5$ 2. $x - 1 = \sqrt{x + 5}$

---

مثال دوم : معادله ، $\sqrt[3]{4x^2 + 1} = 5$ را حل نمایید :

هر دو طرف معادله را مکعب میسازیم . $\sqrt[3]{(4x^2 + 1)^3} = 5^3$

هر دو قیمت در معادله مذکور صدق میکند . $4x^2 + 1 = 125$

$x^2 = 31$ , $x = \pm\sqrt{31}$

تمرین : معادلات ذیل را حل نمایید و هم امتحان معادله را فراموش نباید کرد .

3. $\sqrt[4]{3x - 1} = 2$

مثال دوم : حل کنید ........................................ $\sqrt[3]{4x^2 + 1} = 5$

$(\sqrt[3]{4x + 1})^3 = 5^3 = 125$

$4x^2 + 1 = 125$

$x^2 = 31$

$x = \pm\sqrt{31}$

$x_1 = \sqrt{31}$ و $x_2 = -\sqrt{31}$

## معادلاتیکه دو جذر دارند :

قاعدهٔ عمومی برای حل معادلات شامل جذر دو حده ، قرار ذیل تشریح میگردد :

1- یکی از حد های جذری را جدا کنید .

2- طریقه مربع ساختن یا مکعب ساختن را تطبیق نمایید .

3- اگر حد جذری باقی ماند . مرحله (1) و (2) را باز تطبیق کنید.

4- حل معادله را در معادله اولی امتحان نمایید .

مثال سوم : معادله ذیل را حل نمایید :

$$\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-3}=1 .$$

$$\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-3}=1$$

$$\sqrt{2x-5}=1+\sqrt{x-3}$$

$$(\sqrt{2x--5})^2=(1+\sqrt{x-3})^2$$

$$2x-5=1+2\sqrt{x-3}+(x-3)$$

$$x-3=2\sqrt{x-3}$$

$$(x-3)^2=(2\sqrt{x-3})^2$$

$$x^2-6x+9=4(x-3)$$

$$x^2-6x+9=4x-12$$

$$x^2-10x+21=0$$

$$(x-7)(x-3)=0$$

$$x_1=7 \qquad x_2=3$$

مثال چارم : معادله ذیل را حل نمائید :

$$A=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$$

$$A=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$$

$$A^2=1+\frac{a^2}{b^2}$$

$$b^2A^2=b^2+a^2$$

$$b^2A^2-b^2=a^2$$

$$\sqrt{b^2A^2-b^2}=a$$

یا $\sqrt{b^2(A^2-1)}=a$

$$b\sqrt{A^2-1}=a$$

تمرین : معادلات ذیل را حل نموده امتحان کنید .

4. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

5. $A=\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}$

---

## تمرین 9.7

معادلات ذیل را حل و امتحان نماید . امتحان کردن جوابات را فراموش نکنید .

1. $\sqrt{3x-4}=1$

2. $\sqrt[3]{2x+1}=-5$

3. $\sqrt[4]{x^2-1}=1$

4. $\sqrt{m+1}-5=8$

5. $\sqrt{y-1}+4=0$

6. $5+\sqrt{3x^2+\pi}=0$

7. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}=4$

8. $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$

9. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x+3}+1=0$

10. $\sqrt{2m-3}=\sqrt{m+7}-2$

11. $\sqrt[3]{6x+9+8}=5$

12. $\sqrt[5]{3x+4}=2$

13. $\sqrt{6x+7}=x+2$

14. $\sqrt{6x+7}-\sqrt{3x+3}=1$

15. $\sqrt{20-x}=\sqrt{9-x}+3$

16. $\sqrt{n+2}+\sqrt{3n+4}=2$

17. $\sqrt{7.35x+8.051}=0.345x+0.067$

18. $\sqrt{1.213x+9.333}=5.343x+2.312$

19. $x^{1/3}=-2$

20. $t^{1/5}=2$

21. $t^{\frac{1}{4}} = 3$

22. $m^{\frac{1}{2}} = -7$

23. $8 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

24. $3 = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

25. $\sqrt[3]{m} = -5$

26. $\sqrt[4]{t} = -5$

در تمرینات 28 و 27 متحول ها نماینده گی از اعداد مثبت مینمایند .

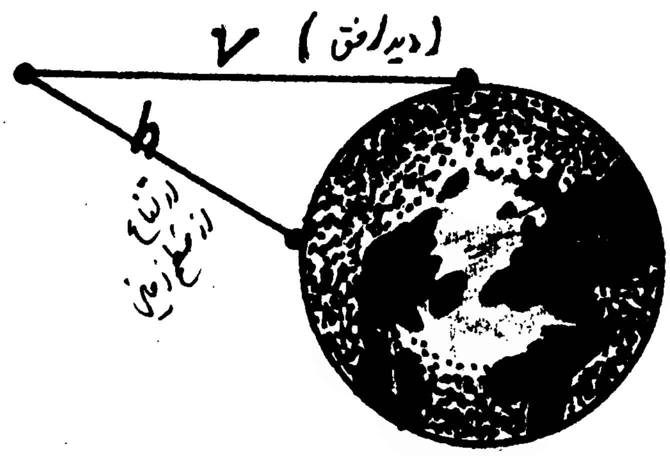
28. $H = \sqrt{c^2 + d^2}$ $\quad c = ?$

27. $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ $\quad L = ? \quad g = ?$

در معادله ذیل V ، فاصله است به میل ، h ارتفاع است به فت

$$V = 1.2\sqrt{h}$$

این معادله دید افق را از یك ارتفاع h تخمینی نشان داده میتواند .




-29 از یك کلکین طیارۀ که به ارتفاع 30,000 ft در پرواز باشید ، چقدر دورتر فاصله را دیده میتوانید ؟

-30 یك نفر از بام یك برج که 72 ft ارتفاع دارد چقدر دورتر فاصله را دیده میتواند ؟

-31 دید افق یك نفر از کلکین یك طیاره 144 میل است . ارتفاع طیاره چند است .

-32 يك شخص به فاصله 11 ميل دورتر ديده ميتواند . شخص مذكور به كدام ارتفاع موقعيت دارد .

معادلات ذيل را حل نمائيد :

33. $(x-5)^{2/3} = 2$

34. $(x-3)^{2/3} = 2$

35. $\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}} = \dfrac{5}{11}$

36. $\sqrt{\sqrt{x+25}-\sqrt{x}} = 5$

37. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\sqrt{2x}$

38. $2\sqrt{x+3}=\sqrt{x}+\sqrt{x+8}$

39. $\sqrt[4]{x+2}=\sqrt{3x+1}$

40. $\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt[6]{x+1}$

## (8 - 2) معادلاتیکه به شکل معادلهٔ درجه دوم تعدیل میشوند

اهداف : با تکمیل کردن این بخش شما قادر خواهید شد که :

ـ معادلات را حل نمائید که به معادلات درجه دوم تعدیل شوند .

ـ معادلات تطبیقی که از طریق معادلات درجه دوم حل میشوند ، حل نمائید .

---

### حل معادلاتیکه بشکل معادله درجه دوم قابل تعدیل میباشند :

در اکثر موضوعات فزیك و ساینس با معادلاتی سروکار پیدا میکنیم که در حقیقت معادلات درجه دوم نمیباشند . ولیکن میتوان این معادلات را بطریقه معادلات درجه دوم حل نمود .

بطور مثال :

معادله $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$ را میتوانیم بطریقه فیکتورینگ یا فورمول عمومی درجه دوم حل کنیم . بعد از آن با در نظر داشت $\sqrt{x} = u$ میتوانیم قیمت x را پیدا کنیم .

معادلاتیکه به این طریقه حل میگردند عبارت اند از : معادلاتی که قابل تجزیه به معادله درجه دوم باشند .

وقتیکه معادلا قابل تجزیه به معادلات درجه دوم را بخواهیم حل نمائیم ، نخست : متحول معادله را با یك حرف دیگر تعویض مینمائیم . چنانکه معادله را از نگاه متحول جدید حل میکنیم . و سپس متحول اولی را از طریق تعویض تحول جدید دوباره بدست میآوریم .

**مثال اول :**

معادله $x+3\sqrt{x}-10=0$ را حل کنید . (۱)

$\sqrt{x}$ را با U در معادله تعویض ......(1)... نموده ، معادله را از جنس x حل میکنیم .

یا $U^2 = x$ و $U=\sqrt{x}$

$$x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$$

$$x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$$

$$U^2 + 3U - 10 = 0$$

$$(U+5)(U-2) = 0$$

$$u_1 = -5$$

$$u_2 = -2$$

$U_1 \Rightarrow \sqrt{x} = -5$ ( حل نیست )

$U_2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2$

$x = 4$

امتحان : $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$

| | |
|---|---|
| $4+3\sqrt{4}-10$ | 0 |
| $4+\ \ 6-10$ | |
| 0 | |

حل معادله 4 است

**مثال دوم :**

معادله $x^4 - 6x^2 + 7 = 0$ را حل کنید .

نخست $u = x^2$ ، را به کاربرده معادله مذکور را بطریق معادله درجه دوم حل میکنیم .

$$(x^4 - 6x^2 + 7 = 0)$$

$u = x^2 , u^2 = x^4$ . . . (تعویض)

$$u^2 - 6u + 7 = 0$$

$$a = 1 , b = -6 , c = 7$$

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1}$$

به یاد داشت کسری تبدیل نمایید .

80. $0.999\overline{9}$ 81. $3.74\overline{74}$

82. $18.3245\overline{245}$ 83. $12.34\overline{7652}$

ثبوت کنید که :

84. $(b + c)a = ba + ca$

85. ثبوت کنید که هر عدد مثبت از صفر بزرگتر است .

قیمت متحول اولی را از طریق تعویض دوباره بدست آورده میتوانیم .

حال u را با x در معادله تعویض میکنیم :

$$u = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$u = \frac{2 \times 3 \pm 2\sqrt{2}}{2 \times 1} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

$x^2 = u$

$$x^2 = 3 + \sqrt{2} \qquad x^2 = 3 - \sqrt{2}$$

$$x = \pm\sqrt{3 + \sqrt{2}} \qquad x = \pm\sqrt{3 - \sqrt{2}}.$$

چار جواب عبارت اند از :

$$\sqrt{3 + \sqrt{2}} \quad , \quad -\sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

$$-\sqrt{3 - \sqrt{2}} \quad , \quad \sqrt{3 - \sqrt{2}} .$$

## مثال سوم :

معادله $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$ را حل کنید .

فرضاً : $u = x^2 - x$ باشد .

$$(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0 .$$

فرضاً : <== $u = x^2 - x$ فلهذا :

$u^2 - 14u + 24 = 0$ $\qquad$ $x^2 - x = 2$

$(u - 12)(u - 2) = 0$ $\qquad$ $x^2 - x - 2 = 0$

$u_1 = 12 . \quad u_2 = 2$ $\qquad$ $(x - 2)(x + 1) = 0$

$x^2 - x = 12$ $\qquad$ $x_1 = 2 . \quad x_2 = -1 .$

$x^2 - x - 12 = 0$

$(x-4)(x-3)=0$

چار قیمت معادله عبارت اند از : $1 - , 2 , 3 - , 4$

$x_3 = 4 , x_4 = -3$ .

## مثال چارم :

معادله $t^{2/5} - t^{1/5} - 2 = 0$ را حل کنید :

فرضاً $u = t^{1/5}$ باشد ، $u^2 = t^{2/5}$

$t^{2/5} - t^{1/5} - 2 = 0$

$u^2 = t^{2/5}$

قیمت های u را تعویض نمائید :

$u^2 - u - 2 = 0$

$(u-2)(u+1)=0$

$u_1 = 2 \quad , \quad u_2 = -1$

$t^{1/5} = u$

$t^{1/5} = 2$ یا $t^{1/5} = -1$

$t = 32$ یا $t = -1$

$\boxed{t = 32 , -1}$

## مثال پنجم :

معادله $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ را حل کنید .

اگر $u = x^2$ باشد .

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^4 = u^2$

$u^2 + 3u - 4 = 0$

$(u+4)(u-1)=0$

$u = -4 \ , \ u = 1$

$x^2 = -4$ , یا $x^2 = 1$ .

$x = \pm 2i \ , \ x = \pm 1$ .

جوابات : $2i \ , \ -2i \ , \ 1 \ , \ -1$

تمرین: سوالات ذیل را حل کنید :

1. (a) $x + \sqrt{x} - 12 = 0$ b) طریقه دیگر

2. $2x^4 - 10x^2 + 11 = 0$

3. $(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1) - 2 = 0$

4. $t^{2/3} - 3t^{1/3} - 10 = 0$

5. $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

مثال ششم : ( سوال چاه )

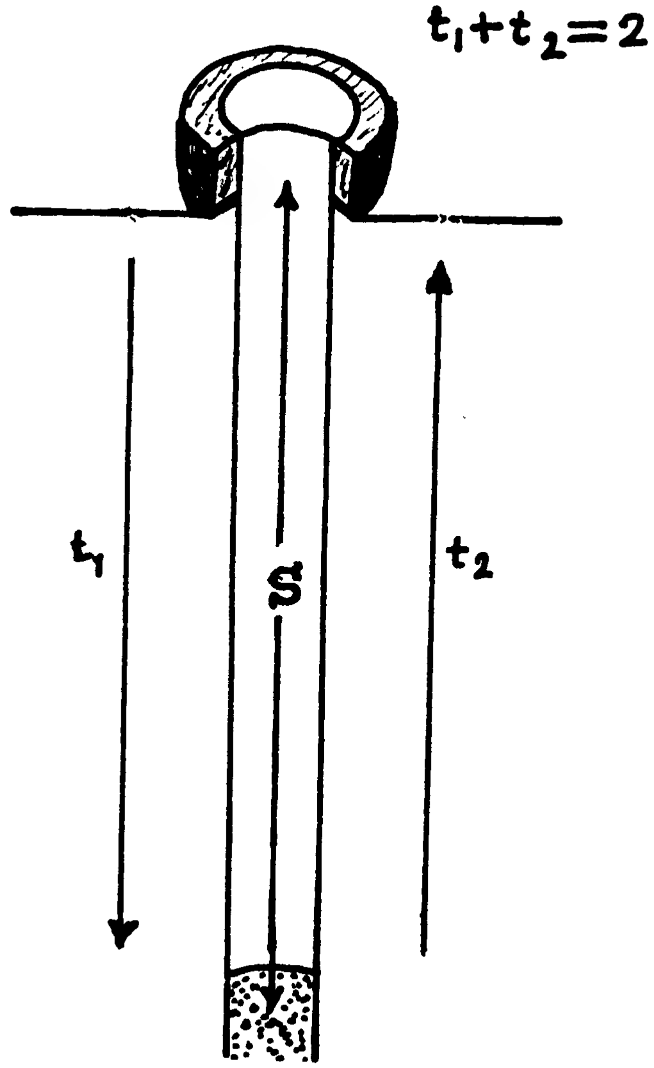
جسم را در چاه می اندازیم صدای ضربه جسم به آب بعد از دو ثانیه در بالای چاه شنیده میشود . سرعت صوت (1100 ft / sec) است . معلوم کنید که چاه مذکور چقدر عمق دارد ؟

حل :

(1) آشنا شدن به پرابلم :

نخست پرابلم را ترسیم کرده عناصر معلوم و مجهول را با حروف مخصوص ارائه

مینمائیم .




عمق چاه را ( s ) و وقتیکه جسم به آب چاه میرسد آنرا ( $t_1$ ) نام میگذاریم . و وقت که صدا از عمق چاه بالای چاه میرسد آنرا ( $t_2$ ) نام میگذاریم . مجموع هر دو زمان عبارت اند از : $t_1 + t_2 = 2$ (ثانیه)

حال رابطه بین هر دو وقت مسافه را مطابق فورمول ( سقوط آزاد ) چنین ارائه مینمائیم : $S = 16t^2 + V_0 t$ .................. ( سیستم انگلیسی )

-1 $S = 16t^2 + V_0 t$ ، ( سقوط آزاد ) در صورتیکه s از جنس فت باشد .

چون جسم آزادانه رها شده ، لهذا سرعت اولی --> ( $V_0$ ) مساوی به صفر است . زمان ( $t_1$ )

را قرار ذیل بدست میآوریم .

$$S = 16 t_1^2$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{s}}{4} \quad \ldots \quad (\acute{2})$$

( سقوط آزاد ، سرعت اولی صفر )

در مرحله دوم زمان ( $t_2$ ) را در معادله سرعت صوت ( 1100 ft / sec ) تعویض مینمایم که عبارت است از :

$$t_2 = \frac{s}{1100} \longleftarrow S = 1100 t_2$$

چون زمان رسیدن سنگ به سطح آب ، و زمان رسیدن صوت به بالای چاه مجموعاً دو ثانیه اند لهذا :

$$t_1 + t_2 = 2 \text{ یا } 2 = \frac{\sqrt{s}}{4} + \frac{s}{1100}$$

سوم : حل معادله ($\acute{2}$) را با استفاده از فورمول معادله درجه دوم اجرا میکنیم :

$$s = 16 t^2 + V_0 t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$s = 16 t^2 , \quad t_1 = \frac{\sqrt{s}}{4} \quad \text{-----------} \quad (2)$$

$$S = (1100 \text{ ft/sec.}) \times t_2$$

$$s = 1100 \times t_2 , \quad t_2 = \frac{s}{1100} \quad \text{-----------} \quad (3)$$

$$t_1 + t_2 = 2 \ , \quad \frac{\sqrt{s}}{4} + \frac{s}{1100} = 2 \ \text{-----} \ (4)$$

$$275\sqrt{s} + s = 2200 \ , \quad s + 275\sqrt{s} - 2200 = 0$$

$$u = \sqrt{s} \ . \qquad u^2 = s$$

$$u^2 + 275\,u - 2200 = 0 \ .$$

$$u = \frac{-275 \pm \sqrt{275^2 + 8800}}{2} \cong \frac{-275 \pm 290.56}{2}$$

$$\cong \frac{-275 + 290.56}{2}$$

$$u \cong \frac{15.56}{2} \cong 7.78 \qquad u \cong 7.78 \cong \sqrt{s} \quad , \qquad s \cong 60.5284$$

(عمق چاه) 60.53 ft

**تمرین :**

6- یك جسم در چاه رها شده و بعد از مدت 5 ثانیه صدا تصادم جسم به آب ، شنیده میشود . فرض کنید که سرعت صوت ( 1100 ft / sec ) باشد . عمق چاه را معلوم کنید .

## تمرین 2-8

معادلات ذیل را حل کینند ؟

1. $x - 10\sqrt{x} + 9 = 0$

2. $2x - 9\sqrt{x} + 4 = 0$

3. $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$

4. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

5. $t^{2/3} + t^{1/3} - 6 = 0$

6. $w^{2/3} - 2w^{1/3} - 8 = 0$

7. $z^{1/2} = z^{1/4} + 2$

8. $6 = m^{1/3} - m^{1/6}$

9. $(x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x) - 35 = 0$

10. $(1 + \sqrt{x})^2 + (1 + \sqrt{x}) - 6 = 0$

11. $(y^2 - 5y)^2 + (y^2 - 5y) - 12 = 0$

12. $(2t^2 + t)^2 - 4(2t^2 + t) + 3 = 0$

13. $w^4 - 4w^2 - 2 = 0$

14. $t^4 - 5t^2 + 5 = 0$

15. $x^{-2} - x^{-1} - 6 = 0$

16. $4x^{-2} - x^{-1} - 5 = 0$

17. $2x^{-2} + x^{-1} = 1$

18. $10 - 9m^{-1} = m^{-2}$

19. $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$

20. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

21. $\left(\frac{x^2 - 2}{x}\right)^2 - 7\left(\frac{x^2 - 2}{x}\right) - 18 = 0$

22. $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 8\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + 15 = 0$

23. $\frac{x}{x-1} - 6\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 40 = 0$

24. $\frac{2x+1}{x} + 30 = 7\sqrt{\frac{2x+1}{x}}$ ; (کمک، $u = \sqrt{\frac{2x+1}{x}}$)

25. $5\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 = 3\left(\frac{x-2}{x-2}\right) + 2$

26. $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x+3}\right) - 6 = 0$

27. $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2 - \left(\frac{x^2-1}{x}\right) - 2 = 0$

28. $\left(\frac{x+8}{x-8}\right)^2 - 6 = 5\left(\frac{x+8}{x-8}\right)$

حل پرابلم :

29- سنگی از یك قله رها شده بعد از 3 ثانیه صداء تصادم سنگ بزمین به بالای قله میرسید . اگر سرعت صوت (1100 ft / sec) فرض شود . این قله چقدر ارتفاع خواهد داشت .

30- یك سنگ از قله کوه رها شده است و بعد از مدت 4 ثانیه صداء تصادم سنگ بزمین بالای قله میرسد . اگر سرعت صوت ( 1100 ft / sec ) تصور

شود . بلندی قله را معلوم کنید. ؟

سوالات ذیل را حل کنید : ( جوابات را دوباره امتحان کنید) .

31. $6.75x = \sqrt{35x} + 5.36$

32. $\pi x^4 - \sqrt{99.3} = \pi^2 x^2$

33. $9x^{3/2} - 8 = x^3$

34. $\sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[6]{2x+3}$

35. $\sqrt{x-3} - \sqrt[4]{x-3} = 2$

36. $a^3 - 26a^{3/2} - 27 = 0$

37. $\dfrac{2x+1}{x} = 3 + 7\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}$

38 - سوالات ذیل را حل کنید :

در شروع یك سال مبلغ 2000$ در بانگ سرمایه گذاری میشود . شش ماه بعد مبلغ 3000$ در یك حساب دیگر به عین فایده گذاشته میشود . در شروع سال دیگر دیده میشود که در وجه حساب دوم نظر به حساب اول 956.80$ زیاد تر است . اگر فایده به ربح مرکب نصف سال ( نیم ساله ) سرمایه گذاری شده باشد.نرخ فایده این سرمایه را معلوم کنید .

## 2-9 متحول ها

### الف : اقسام متحول

تحول مستقیم :

در اکثر مسایل فزیك ،"معادلات خطی" از طریق یك ثابت بوجود می آید .

مثلاً $Y = kx$ ، که در این معادله $(k)$ عدد ثابت و مثبت میباشد .

درین معادله ملاحظه میشود : وقتیکه x زیاد میشود ، قیمت y همچنان افزایش میابد . درین حالت ما میگوئیم که در معادله فوق حرف k ثابت معادله است ، و y تناسب مستقیم با x دارد درین معادله صرف قیمت های مثبت x ، و y مطرح میباشند .

**تعریف :**

اگر دو متحول x ، y از طریق معادله $y = kx$ با هم ارتباط داشته باشند، که حرف k ثابت و مثبت باشد ، ما میگوئیم که y با x ارتباط مستقیم دارد . به عباره دیگر y مستقیماً متناسب است به x .

به طور مثال :

محیط یك دایره ، مستقیماً متناسب است به قطر دایره --> $(C = \pi D)$ . یك موتر که بسرعت ثابت 65mph حرکت میکند. دراینجا فاصله تناسب مستقیم با وقت دارد $(d = 65t)$

**مثال اول :**

معادلهٔ را در یافت کنید که y با x تناسب مستقیم داشته باشد و قیمت y مساوی 5.6 بوده وقتیکه $x = 8$ باشد .

حل : ما میدانیم که : $y = kx$

پس $5.6 = k(8)$ .............. که ==> $k = 0.7$ میشود .

بعباره دیگر $y = 0.7x$ .......... یك معادله خطی است .

## ۳_۱ قیمت مطلقه ، و اعداد توان دار و عدد نویسی باصول ساینس



اهداف :

شما قادر خواهیدشد که :

افاده های اعدادتام و توان دار را ساده سازید.

اعدادرا از شکل عشاری به شکل ساینسی و برعکس آن تبدیل نمایید.

افاده هائی را که قیمت های مطلقه در آن شامل باشند، ساده سازید.

---

### الف: اعدادتام به شکل توان دار :

هر گاه یك عددتام کلان تر از (1) به حیث توان عددa قرار گیرد، در ینصورت عدد a نظر به قیمت توان ، در نفس خود ضرب میشودمانند: $5^3$

به معنی $= 5 X 5 X 5$ , و توان (1) خود عدد راتغیر نمیدهدمانند: $a^1 = a$

$$(-3)^1 = -3$$

اگرعددصفر بحیث توان یك عدد استعمال میگردد، همان عدد مساوی میشودبه یك .

مانند: $(37)^0 = 1$ , $a/a = a^{1-1} = a^0 = 1$ (هر عدد به توان صفر مساوی است به یك .)

مثالهای ذیل را در نظر بگیرید.

$$(-4)^2 = (-4)(-4) = 16$$

$$(-4)^2 = 16 \quad \text{یا}$$

$$-x = -1 X x = -x$$

در مورد $y = kx$ اگر ، $(x_1, y_1)$ و $x_2, y_2$ حل معادله باشد .

ما داریم :

$$y_1 = kx_1 \text{ و } y_2 = kx_2 .$$

یا

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{kx_2}{kx_1} = \frac{k}{k} X \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} \text{ - - - - - - -}$$

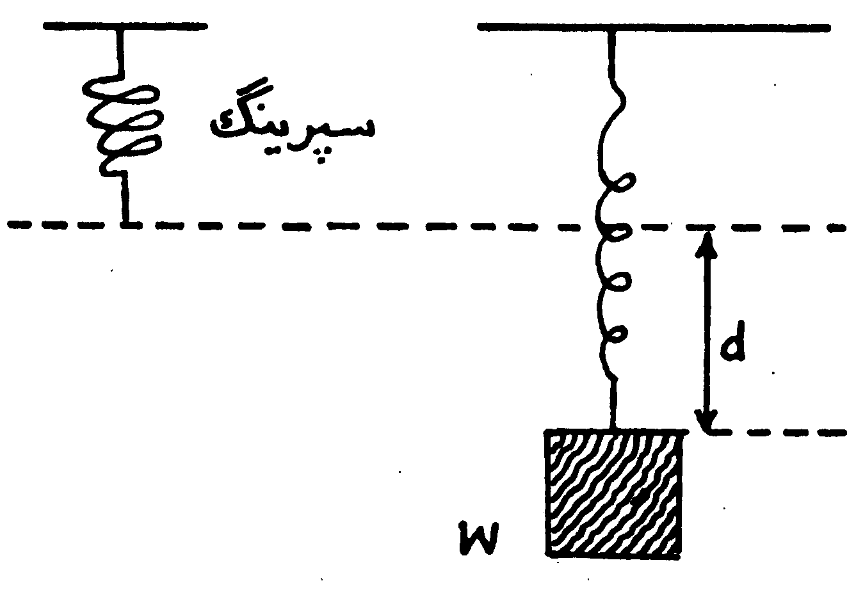
و به عباره دیگر :

این معادلهٔ تناسب است . . . $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ ( تناسب مستقیم )

## مثال دوم :

( پرابلم سپرینگ )

« قانون هوك » ، ( Hook's Law ) ، بیان میکند که : هرجسم ارتجاعی (سپرینگ) که ذریعهٔ آویزان کردن یك وزن کش میشود ، مقدار کشش آن مربوط است به مقدار وزن جسم آویزان شده . اگر مقدار یك سپرینگ تحت تاثیر ( 3kg ) وزن ، ( 40cm ) باشد هر گاه ، وزن 2kg به همین سپرینگ آویزان شود ، چقدر کش خواهد شد ؟



طریقه اول : نخست قیمت k را با استفاده از ، معلومات حالت اول معلوم میکنیم بعداً با استفاده معلومات حالت دوم با تعویض قیمت ثابت معادله d2 حل میکنیم .

$$d_1 = k\,w_1 \qquad d_2 = \frac{40}{3} X\, w_2$$

$$40 = k X 3 \qquad d_2 = \frac{40}{3} X 2$$

$$\frac{40}{3} = k \qquad d_2 = \frac{80}{3}, \implies 26.7\ cm .$$

طریقه دوم : $\frac{d_2}{d_1} = \frac{w_2}{w_1}$ ، $\frac{d_2}{40} = \frac{2}{3}$ ، $3d_2 = 40(2)$

$d_2 = 26.7\ cm.$

## تحول معکوس :

در بعضی حالات با معادلاتی سروکار پیدا میکنیم ، که مفهوم تناسب معکوس را ارائه میکنند مثلاً $(y = k/x)$

که حرف k یك ضریب مثبت است . در این رابطه ( معادله ) به وضاحت مشاهده میشود . وقتی که x زیاد میشود ، با همان تناسب y کاهش مییابد . این حالت را بنام تحول معکوس مینمامند .

مثال 5 :

معادله یك متحول را پیدا کنید که در آن y با x ، تناسب معکوس داشته و قیمت $y = 32$ است وقتیکه $x = 0.2$ باشد .

$$y = k\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$32 = k\left(\frac{1}{0.2}\right)\ ,\ k = 6.4$$

$$y = 6.4\left(\frac{1}{x}\right)$$

**تعریف :**

اگر دو متحول x ، و y که با هم دیگر از طریق معادلهٔ ( y = k / x ) ارتباط داشته و k ضریب مثبت باشد ، گفته میشود که y تناسب معکوس با x دارد ، یا ( y معکوساً متناسب است با( x ) . اگر y تناسب معکوس با x داشته باشد که y = k / x است . و $(x_1, y_1)$ ، $(x_2, y_2)$ حل معادله باشد . پس ما داریم :

$$y_1 = \frac{k}{x_1}\ ,\ y_2 = \frac{k}{x_2}\ ,\quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{K}{x_2} \div \frac{k}{x_1} \dots \rightarrow = \frac{k}{x_2} X \frac{x_1}{K}$$

$$= \frac{x_1}{x_2}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2}$$ ----------- ( تناسب معکوس است )

معادله ، ( y2 / y1 = x1 / x2 ) یك تناسب معکوس را نشان میدهد که میتوان آنرا در حل پرابلم ها بکار برد .

طریقه دوم : به طریقه تناسب (مستقیم) . . . بحوال قبلی

بدون دریافت k ، معادله تناسب را برای دریافت d2 حل میکنیم .

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{w_2}{w_1} \quad \text{--------} \quad (\text{تناسب مستقیم})$$

$$\frac{d_2}{40} = \frac{2}{3} \qquad 3 \times d_2 = 40 \times 2 \qquad d = 26.7\text{cm} .$$

---

**تمرین :**

-1 معادله را پیدا کنید در صورتیکه $x = 0.2$ و $y = 32$ باشد ، y تناسب مستقیم با x داشته باشد .

-2 تحت شرایط مثال دوم ، وزن آویزان شده چند خواهد بود در صورتیکه مقدار کشش سپرینگ (60 cm) باشد ؟

-3 « قانون اوم » بیان میکند که ولتاژ (V) ، در یک سرکت برقی ، با جریان (I) تناسب مستقیم دارد . مثلاً اگر ولتاژ 10 ولت باشد و جریان یک سرکت (3) امپیر است. شما ولتاژ سرکت را دریافت کنید وقتیکه : جریان این سرکت به 15 امپیر برسد .

-4 مقدار « گار بیج » ( مواد فاضل و باطل (G) ) در یک شهر رابطهٔ مستقیم، با تعداد مردم دارد . قرار معلوم ، مقدار 50 تن « گار بیج » ذریعه 200 نفر در ظرف یکسال از خانه بیرون میشود . حال ، نفوس یک شهر دیگر 705,000 نفر میباشد . مقدار گاربیج این شهر دوم در ظرف یکسال چقدر خواهد بود ؟

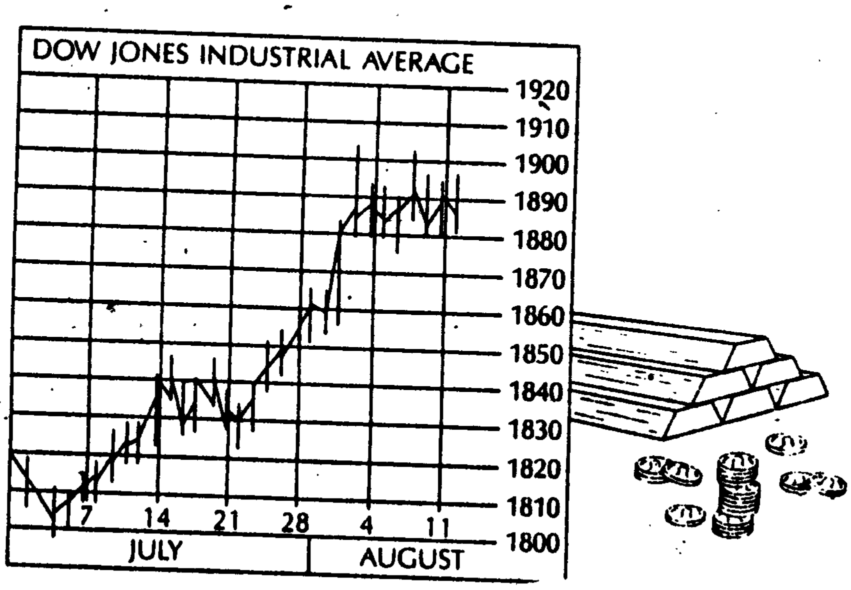
مثال سوم :

( طلاء و ذخایر کالاها ) :

اکثر اقتصاددانان میگویند که قیمت اجناس با قیمت طلا تناسب معکوس دارد . وقتیکه قیمت طلاء بلند میرود ، قیمت اجناس پائین می آید ، برعکس ، وقتیکه قیمت طلا نزول کرد، قیمت اجناس بالا میرود . فرض کنید که شاخص ( Index ) قیمت های اجناس یك کمپنی 1846 و قیمت طلا 462$ فی اونس بود . اوسط شاخص این کمپنی چند خواهد شد اگر نرخ دالر فی اونس به 440$ سقوط کند ؟

طریقه اول :

ابتداء k را از " داتا " (آمار) معلوم کرده ، بعداً معادله را از نگاه D2 حل میکنیم .




$$D_1 = \frac{k}{G_1}$$

D ===> کالا

$$1846 = \frac{k}{462}$$

G ===> طلا
قیمت فروش

$$k = 1846\,(462)$$

$$= 852{,}852$$

$$D_2 = \frac{k}{G_2} = \frac{852{,}852}{440} = 1938.3$$

طریقه دوم :

طریقه تناسب را بکار برده ، قیمت ( D2 ) را پیدا میکنیم .

معادله تناسب معکوس

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{G_1}{G_2}$$ ...... ( تناسب معکوس )

$$\frac{D_2}{1846} = \frac{462}{440}$$

$$440 ( D_2 ) = 1846 ( 462 )$$

$$D_2 = 1938.3$$

**اقسام دیگر تحول :**

تحول به اشکال مختلف و انواع زیاد از طریق معادله ارائه میگردد .

**تعریف :**

$y$ مستقیماً تحول مینماید با مربع $x$ ، در صورتیکه معادله با یك ضریب مثبت $k$ ارائه شده باشد . مانند : $y = kx^2$

مثال : مساحت دایره تناسب مستقیم دارد به مربع شعاع آن.باین ترتیب : $A = \pi r^2$

تعریف : $y$ معکوساً تحول مینماید با مربع $x$.البته از طریق یك ضریب مثبت $k$

مانند :

$$y = k \frac{1}{x^2}$$

مثال : وزن یك جسم ( $w$ ) معکوساً متناسب است به فاصله ( $d$ ) آن از مرکز کره زمین ، باین شکل :

$$W = \frac{k}{d^2}$$

تعریف : y هم با x و هم با z تحول مینماید ، آنهم از طریق ضریب k مانند $y = kxz$

مثال : معادله مساحت مثلث را تحت مطالعه قرار بدهید $A = (1/2)(hb)$ ، درین معادله ملاحظه میشود که مساحت تحول مشترك و مستقیم با (b) و (h) دارد . امثال ثابت درین معادله عدد (1/2) است .

$$A = \frac{1}{2} bh$$

همچنان اقسام زیاد متحول ها در عین معادله یکجا باهم واقع شده میتوانند .

بطور مثال :

$$y = k \frac{xz^3}{w^2}$$

که درین معادله (y) تحول مینماید مستقیماً با (x) و مکعب z، و معکوساً با مربع w ، k ثابت معادله میباشد .

---

**تمرین**

-6 در حالیکه زمان برای راندن موتر به یك فاصله معین معکوساً متناسب به سرعت موتر میباشد . مدت 5 ساعت را در بر میگیرد که یك موتر به سرعت 60 km/h این فاصله معین را طی کند . چقدر وقت خواهد گرفت که همین فاصله ثابت را به سرعت 40km/h طی نمائید .

-7 نسبت $(A_2 / A_1)$ را در صورتی پیدا کنید ، که A1 و A2 بالترتیب مساحت از یك دائره باشند .

-8 معادلهٔ را پیدا کنید که در آن y مستقیماً متناسب به مربع x باشد . چنانچه $y = 12$ میشود، و وقتیکه $x = 2$ باشد .

9- تناسب را که شامل $w2/w1$ باشد دریافت کنید . ( $w = K/d^2$ )

10- معادله را پیدا کنید که y معکوساً متناسب به مربع x باشد. وقتیکه $y = 1/4$ میشود ، در صورتیکه $x = 6$ باشد .

11- تناسب را که شامل $A2/A1$ است. در صورتی پیدا کنید که A1 و A2 بالترتیب مساحت های مثلث باشند .

12- معادله را در یابید که در آن y تحول مشترك به x و z داشته باشد. وقتیکه $y = 42$ میشود، در صورتیکه $x = 2$ و $z = 3$ باشند .

13- معادله را دریابید که y تحول مشترك با x و z داشته ، و معکوساً متناسب به مربع w باشد. درصورتیکه $y = 105$ میشود، وقتیکه $x = 3$، $z = 20$ و $w = 2$ باشند .

14- در سقوط آزاد ، مسافه مستقیماً متناسب است به مربع زمان (t) . اگر یك جسم به فاصله 4 ft در ظرف 0.5sec سقوط کند . وقتی را دریافت کنید که جسم موصوف 64 ft سقوط نماید .

مثال چهارم : ( حجم تنه یك درخت )

حجم V چوب یك درخت تحول مشترك دارد به : ارتفاع (h) درخت، و مربع محیط تنهٔ درخت ( g ) . اگر حجم چوب $7750 ft^3$ باشد ، ارتفاع درخت، 100ft و محیط تنه، 5ft میشود . حال ارتفاع درخت چند خواهد بود ، وقتیکه حجم درخت $37{,}975\ ft^3 =$ و محیط تنه درخت $g = 7\ ft$ باشند ؟ --- ( شکل صفحه ۲۴۷ )

طریقه اول : نخست قیمت k را از روی عناصر معلوم تعیین کرده ، : بعداً معادله را از جنس $h_2$ حل میکنیم .

$$V_1 = k(h_1)(g_1)^2$$

$$7750 = k \times 100 \times 5^2$$

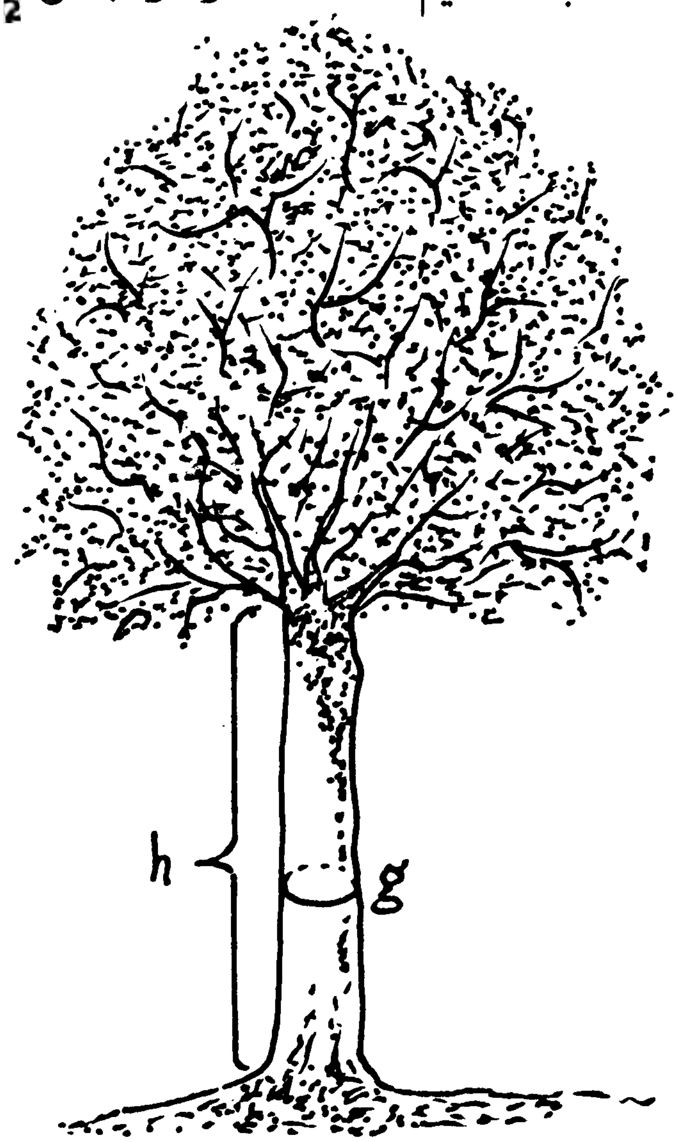
$$3.1 = k$$

$$37{,}975 = (3.1)(h_2)(7)$$

$$250 = h_2$$

$$h_2 = 250 \text{ ft}$$

طریقه دوم : با استفاده از رابطه تناسب ( تناسب مستقیم ) ، معادله را از جنس $h_2$ حل مینمائیم :




$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2 \, g_2^2}{h_1 \, g_1^2}$$

$$\frac{37{,}975}{7750} = \frac{h_2 \cdot 7^2}{100 \times 5^2}$$

$$h_2 = 250 \text{ ft} .$$

**مثال پنجم :**

وزن يك جسم ( w ) تناسب معكوس دارد به مربع فاصله ( d ) آن از مركز كره زمين . نظر به سطح بحر ( 4000 ميل از مركز زمين )، وزن يك كيهان نورد 200 Ib است . وزن موصوف را در صورتيكه به ارتفاع 100 ميل از سطح زمين قرار داشته و سفينه هوائی او در حالت حركت نباشد معلوم كنيد ؟

حل : با استفاده از تناسب چنين داريم .

( تناسب معكوس )

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

$$\frac{w_2}{200} = \frac{4000^2}{4100^2}$$

$$16,810,000 \times w_2 = 200\,(16,000,000)$$

$$w_2 = 190 \text{ Lb}.$$

**تمرين :**

14 : فاصله ( s ) كه يك جسم ، سقوط آزاد مينمايد (طی مینماید) ، تناسب مستقيم به مربع وقت (t) دارد . اگر يك جسم در ظرف 0,5sec ، 4ft سقوط ميكند . وقتی را معلوم كنيد كه يك جسم به فاصله 64ft سقوط آزاد نمايد .

15- a- وزن يك فضاء نورد چقدر خواهد بود اگر وی به ارتفاع 100 ميل از سطح زمين ارتفاع داشته باشد ؟ وزن او در سطح زمين 200 پوند است .

b- در صورتيكه وزن موصوف Lb - 50 تنزيل نمايد ، ارتفاع وی را از سطح زمين معلوم كنيد .

---

**تمرین :**

اعداد ذیل را به توان نشان دهید.

1. $8 X 8 X 8 X 8$ , 2. $x X x X x$ , 3. $4y X 4y X 4y X 4y$ ,

تمرین از 4 الی 10 :

اعداد را بدون توان بنویسید .

4. $3^4$

5. $(5x)^4$

6. $(-5)^4$

7. $-5^4$

8. $(3x)^0$

9. $(5y)^2$

10. $(-2x)^3$

---

**تعریف :**

اگر n یك عددتام مثبت است . پس $a^{-n}$ و $1/a^n$ عین مفهوم را دارند .

به عباره دیگر ، $a^n$ و $a^{-n}$ معکوس یکدیگر اند .

مثالها:

1. $1/5^2 = 5^{-2}$

2. $7^{-3} = 1/7^3$

3. $5^{-4} = 1/5^4 = 1/5 X 5 X 5 X 5 = 1/625$

## تمرین 2-9

معادلهٔ تحولات آتی را تشکیل دهید :

-1 y ارتباط مستقیم با ( x ) دارد، $y=0{,}6$ میشود وقتیکه $x=0.4$ باشد .

-2 y ارتباط معکوس با x دارد، $y=0.4$ میشود وقتیکه، $x=0.8$ باشد .

-3 y ارتباط معکوس با مربع x دارد. $y=0.4$ میشود، وقتیکه $x=0.1$ باشد .

-4 y ارتباط مستقیم دارد با x و z ، $y=56$ میشود، وقتیکه $x=7$ ، $z=10$ باشند .

-5 y ارتباط مستقیم با x ، و z دارد ، و معکوساً متناسب با w . $y=3/2$ میشود وقتیکه $x=2$ ، $z=3$ , $w=4$ باشد .

-6 y با ارتباط مشترک با x و مربع z تحول دارد $y=105$ میشود وقتیکه ، $x=14$ و $z=5$ باشد .

-7 y، با رابطهٔ مشترک با x و y تحول دارد، و معکوساً متناسب به مربع w ، $y=12/5$ میشود وقتیکه $x=16$ , $z=3$ و $w=5$ باشند .

-8 y با رابطهٔ مشترک با x و z تحول دارد ، و معکوساً متناسب به حاصل ضرب w و p . $y=3/28$ میشود وقتیکه $x=3$ , $z=10$ و $w=7$ ، $p=8$ باشند .

-9 y ارتباط مستقیم دارد با x ، اگر x دو چندان گردد تاثیر آن بالای y چه خواهد بود ؟

-10 y ارتباط معکوس دارد با x . اگر x سه چندان گردد ، تاثیر آن بالای y چه خواهد بود ؟

-11 y ارتباط معکوس دارد با x ، اگر x ضرب شود با n ، تاثیر آن بالای y چه

خواهد بود ؟

-12 $y$ تحول مستقیم دارد با مربع $x$ . اگر $x$ ضرب شود با $n$ تاثیر آن بالای $y$ چه خواهد بود ؟

-13 مقدار کثافت هوا (A) که به اتموسفیر داخل میشود تناسب مستقیم دارد به تعداد مردم (N) که در یك منطقه زیست مینمایند . اگر 60,000 نفر (نفوس) باعث تولید 42,600 ( تن ) کثافت در هوا گردند ، آلودگی هوا در یك شهر چقدر خواهد بود ، در صورتیکه شهر دارای ( نفوس ) 750,000 نفر باشنده گردد ؟

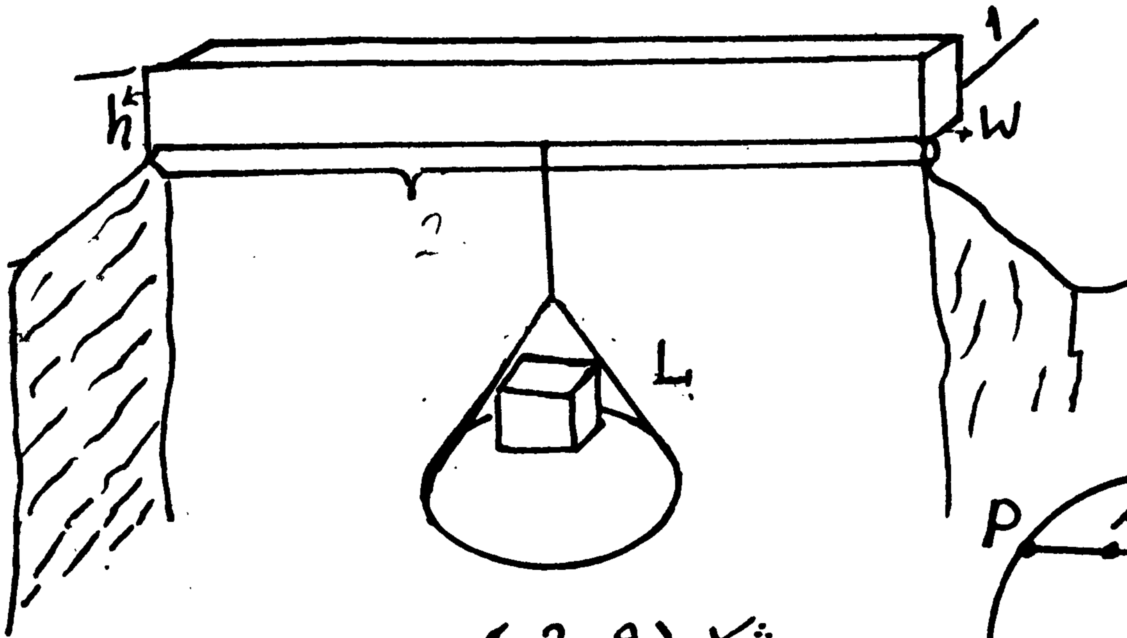
-14 حجم (V) یك کتله غاز رابطهٔ مستقیم دارد به درجه حرارت (T) و معکوساً رابطه دارد با فشار (p) . حجم $V = 231\ in^3$ میشود ، وقتیکه $T = 420$ ، و فشار $p = 20\ lb/in^2$ باشد . حجم همین کتله غاز چند میشود اگر $T = 300$ و $P = 15\ lb/in^2$ باشند .

-15 ( مقاومت مصئون « L » یك بیم ) ( مقدار بر داشت بدون شکست ) رابطه مستقیم دارد ، مشترکاً با عرض (w) و مربع ارتفاع (h) و معکوساً متناسب است به طول (L) بیم . اگر عرض و ارتفاع همین بیم دو چندان شود ، اما طول آن نصف گردد تاثیر آن بالای مقاومت (L) بیم چه خواهد بود شکل (9-2) (b) .

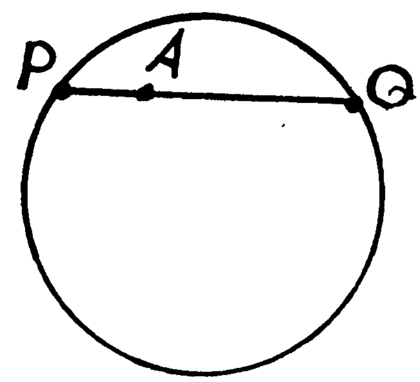
-16 برای وتر PQ در یك نقطه ثابت A در داخل یك دایره ، طول PA معکوساً متناسب است به طول AQ . اگر طول $PA = 64$ باشدوقتیکه $AQ = 16$ باشد .

طول AQ چقدر خواهد بود ، هنگامیکه PA = 4 باشد .

شکل (2-9) a .




شکل (2-9)
(b)




شکل (2-9)
(a)

-17 ( پرابلم افق ) ، مسافهٔ دیدافق ( رصدافق ) ، هر شخص تناسب مستقیم دارد به مربع ارتفاع وی از سطح بحر . اگر یك نفر 19.5 متر از سطح بحر ارتفاع داشته باشد ، فاصله 28.97 کیلو متر را دیده میتواند . ارتفاع این شحص از سطح بحر چقدر خواهد بود ، در صورتیکه فاصله 54.32km را دیده بتواند .

-18 ( مقاومت برقی ) : {در یك درجه ثابت حرارت و ترکیب کیمیاوی ثابت} مقاومت سیم رابطهٔ مستقیم دارد بهطول سیم و معکوساً متناسب است به مربع قطر سیم . اگر مقاومت یك نوع سیم 0.112 اوم باشد، وقتیکه قطر آن 0.254

سانتی متر ، و طول آن 15.24 متر باشد . مقاومت همین سیم را معلوم کنید اگر طول آن 608.7 متر و قطر آن 0.478 سانتی متر باشد ؟

19- ( مساحت مربع ): مساحت مربع مستقیماً متناسب است به مربع یك ضلع آن اگر یك مربع دارای 168.54 متر مربع مساحت بوده و طول ضلع آن 5.3 متر باشد . مساحت مربعی را در یابید اگر طول ضلع آن 10.2 متر باشد .

20- ( شدت نور ) : شدت نور (L) یك چراغ برق (Lamp) تناسب معکوس به مربع فاصله (d) از چراغ دارد . فرضا، $L = 9 w/m$ است ، وقتیکه فاصله 5 متر باشد . شدت نور را در فاصله 10 متر معلوم کنید .

21- A تناسب مستقیم به R و تناسب معکوس به I دارد . اگر $I = 300$ باشد . R را معلوم کنید .

22- ( حجم غاز ) : حجم (V) یك کتله غاز تناسب مستقیم دارد به درجه حرارت (T) و تناسب معکوس دارد، به فشار (P) $V = 231$ cm. میشود وقتیکه $T = 42$ شود .

$P = 20 kg/cm$ حجم غاز را دریافت کنید اگر : $p = 15 kg/cm$ , $T = 30$ باشند.

23- نشان بدهید ، اگر P رابطه مستقیم دارد به q . پس q همچنان رابطهٔ مستقیم به p دارد .

24- نشان بدهید ، اگر U معکوساً متناسب به V باشد ، پس V همچنان تناسب معکوس با U دارد ، و تناسب مستقیم به V .

25- مساحت دایره تناسب مستقیم دارد به مربع قطر آن . ضریب ثابت معادله این دو متحول چند است ؟

26- P تناسب مستقیم به مربع (t) وقت دارد . پس (t) به P چه ارتباط دارد .

27- ( مادل جاذبه در جامعه شناسی ) : به اساس تجارب واضح گردیده ، که اوسط تعداد مخابره تیلفون کردن در یك روز بین دو شهر ، مستقیماً متناسب است به نفوس هر دو شهر ، و معکوساً متناسب است به مربع فاصله بین دو شهر یعنی :

این تیوری را بنام « مادل جاذبه » مینمامند . زیرا که با تیوری جاذبه « نیوتن » مشابهت دارد .

$P_1 =$ نفوس یك شهر

$P_2 =$ نفوس شهر دوم

$D =$ فاصله بین هر دو شهر

$N =$ تعداد مخابره تیلفون

$$N = \frac{k P_1 P_2}{D^2}$$

**سوالات ذیل را ذریعهٔ کلکولیتر باستناد رابطه فوق حل کنید:**

الف : نفوس یك شهر 7 446,24 و از شهر دوم 452,524 میباشد . فاصله بین این دو شهر 174 کیلو متر است. اوسط مخابره تیلفون کردن بین دو شهر 11,153 است. قیمت k را معلوم کرده ، معادله متحول ها را تحریر کنید .

ب : نفوس یك شهر ، که از شهر دیگری 446 کیلو متر فاصله دارد ، 1,511,482 نفر است. اوسط تعداد مخابرهٔ تیلفونی روزانه بین این دو شهر را معلوم نمائید .

ج : اوسط تعداد مخابرهٔ تیلفونی روزانه بین دو شهر 4,270 است. نفوس یك شهر 7,895,563 است. فاصله را بین هر دو شهر دریافت کنید .

## 2-10 کار برد سیمبولهای کمیت ها

درین قسمت ، میخواهیم سیمبولهای ابعاد را تحلیل نمائیم. مهارت های الجبری که ما در دروس گذشته تکرار نمودیم ، در تحلیل ابعاد در خور ارزش است و مورد استفاده ، میباشد.در جدول (2-10) مخفف های سیمبولهای ابعاد نشان داده شده است .

جدول 2-10

| Dimension symbol | Unit |
|---|---|
| m | meter |
| cm | centimeter (0.01 m) |
| km | kilometer (1000 m) |
| g | gram |
| cg | centigram (0.01 g) |
| kg | kilogram (1000 g) |
| s ، sec | second |
| h ، hr | hour |
| L | liter |
| mL | milliliter (0.001 L) |

سرعت : سرعت از طریق تقسیم مسافه بر زمان بدست می آید.( این سرعت اوسط است )

$$V = \frac{d}{t} = \frac{\text{فاصله}}{\text{وقت}} = \text{سرعت اوسط}$$

فاصله ---> d

وقت ---> t

سرعت اوسط ---> V

مثال : اگر فاصله طی شده به کیلو متر و زمان سفر به ساعت باشد ، سرعت به واحد کیلو متر فی ساعت (Km / hr.) ارائه میگردد .

مثلاً : یك موتر در ظرف دو ساعت به اندازه 100 km فاصله را طی کرده ، سرعت اوسط آن عبارت است از :

$$\frac{100km}{2h} \text{ یا } \Longrightarrow 50 \frac{km}{h}$$

## سیمبولهای ابعاد :

سیمبول (100km / 2h) ، چنین مفهوم دارد . که : 100km را به (2h) تقسیم نمائیم . ( ماصرف میتوانیم 100 را به 2 تقسیم نمائیم .) همچنان میتوانیم سیمبولهای کیلو متر ، ساعت ، ثانیه و پوند را بقسم اعداد معامله نمائیم .

مثال : این دو عملیه را مقایسه کنید :

$$\frac{100x}{2y} = \frac{100}{2} X \frac{x}{y} = 50 \frac{x}{y}$$ - - - - - - - این رابطه را

به همرای - - - - - - - $$\frac{100km}{2h} = \frac{100}{2} X \frac{km}{h} = 50 \frac{km}{h}$$

مثال های دیگر :

اول : مقایسه کنید .

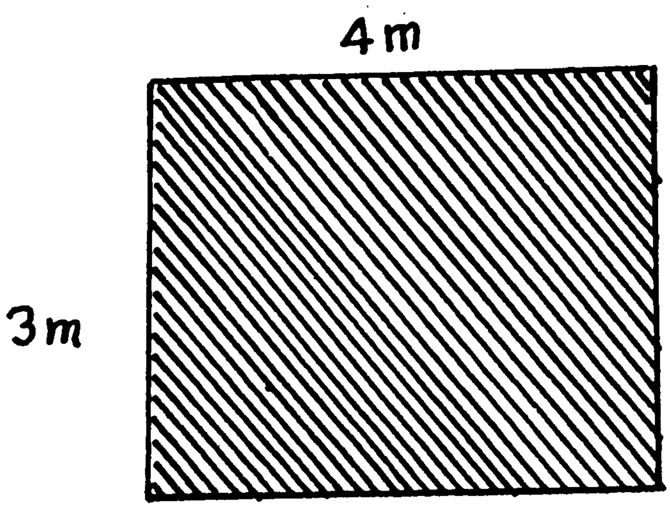
3ft + 2ft = ( 3 + 2 ) ft = 5ft .

3x + 2x = ( 3 + 2 ) x = 5x.

دوم : مقایسه نمائید .

$4m \times 3m = 3 \times 4 \times m \times m = 12m^2$ .

$4x \times 3x = 3 \times 4 \times x \times x = 12x^2$ . ................ به همرای




سوم : مقایسه نمائید :

نفر ساعت 40 = نفر ساعت 5 X 8 = (ساعت 8)(نفر 5)

$5x \times 8y = 5 \times 8 \times x \times y = 40xy$ .

**تمرین :**

---

سرعت را به متر فی ثانیه معلوم کنید :

| | d | t |
|---|---|---|
| 1. | 186,000 m. | 10sec |
| 2. | 8m. | 16sec |

تمرین : این اندازه گیری ها را جمع کنید :

3. 45ft , 17 ft

4. $\frac{3}{4}$ kg , $\frac{2}{5}$ kg

5. $70 \frac{cm}{sec}$ , $35 \frac{cm}{sec}$

در هر کدام از مثالهای فوق ملاحظه نمودیم ، که سیمبولهای کمیت ها بقسم متحولها یا اعداد ، در معادلات معامله میشوند .

مثلاً 3m به این معنی است که 3 X m ‚( 3 X m) ، همچنان km / h به این معنی است که km تقسیم به h .

---

**تمرین :**

این محاسبات را اجرا کنید . بعداً ساده نمائید ( واحدها را تغیر ندهید)

6. $36ft \ X \frac{1yd}{3ft}$

7. $5Lb \ X \frac{16 \ oz}{1 \ Lb}$

8. $\frac{4kg}{5ft} \ X \frac{7ft}{8kg}$

9. $\frac{5 \ in \ X \ 9 \ lb / hr}{4 \ hr}$

10. $\frac{10 \ lb}{7m} \ X \frac{14 \ lb}{5m}$

تبدیل واحد ها :

جهت تبدیل کردن واحد ها ، دو طریقه موجود است :

**اول :** تبدیل واحد به اساس تعویض

**مثال :**

25yd را به انچ تبدیل نمائید .

25yd = 25 X 1yd .

= 25 X 3ft

25yd = 25 X 1yd

= 25 X 3ft

$= 25 X 3 X 1ft$

$= 25 X 3 X 12in$

$= 900in$

$= 25 X 3 X 1ft$

$= 25 X 3 X 12in$

$= 900in$

دوم :

طریقه قبول شده تبدیل واحد ها ( بنام ضرب به یک )،که از دیگر طریقه ها ترجیح داده میشود،در ذیل تشریح گردیده است .

7.2 انچ را به یارد تبدیل کنید .

7.2 " ===> yd .

$$7.2in = 7.2in \times \frac{1ft}{12in} \times \frac{1yd}{3\ ft}$$

هر کدام از کسرها مساوی به یک است .

$$\frac{1ft}{12in} = 1$$

$$= \frac{7.2}{12(3)} \frac{in}{in} \frac{ft}{ft} yd = 0.2yd$$

---

تمرین : تبدیل واحد های ذیل را اجرا نمائید .

11. 34yd ----> in .

12. 11mi ----> ft .

13. 5 hr . ----> sec .

14. 720 in ---> yd .

15. 36,960m ----> km

16. 360,000sec ----> h r .

**تمرین :**

11. $1/4^3$ را به توان منفی بنویسید .

12. $10^{-4}$ را به توان مثبت بنویسید .

13. برای $4^{-3}$ سه نوع سیمبول دیگر بنویسید ( به سه طریق دیگر بنویسید )

---

**مشخصات توان ها :**

ضرب توان ها: مثال اعدادتوان دار ذیل را در نظر گیرید:

$$b^5 X b^{-2} = (b X b X b X b X b)(1/b X b) = (b X b/b X b)(b X b X b)$$

$$= 1 (b x b x b) = b^3$$

**قضیه پنجم**

برای هر عدد a و اعداد تام m ، و n میتوان نوشت :

$$\boxed{a^m X a^n = a^{m+n}}$$

با استفاده از قضیه پنجم میتوان گفت که توان های اعداد درحالت ضرب جمع میشوند ، به شرط انکه قاعده های آنها مساوی باشند. مثال :

ضرب نمایید و ساده سازید :

4. $x^4 X x^{-2} = x^{4+(-2)} = x^2$

5. $5^5 X 5^5 = 5^{10}$

6. $c^{-3} X c^{-2} = c^{-5}$

7. $a^4 X a^3 = a^7$

**مثال :**

60 کیلو متر فی ساعت را به متر فی ثانیه تبدیل نمائید .

$$60\,\frac{km}{h} = 60\,\frac{km}{h} \times \frac{1000m}{1km} \times \frac{1h}{60min} \times \frac{1min}{60sec}$$

$$= \frac{60 \times 1000}{60 \times 60} \times \frac{km}{km} \times \frac{h}{h} \times \frac{min}{min} \times \frac{m}{sec}$$

$$= 16.67\,\frac{m}{sec} = 16.67\ m/s\,.$$

مثال : 55 میل فی ساعت را به فت فی ثانیه تبدیل کنید .

$$55\,\frac{mi}{hr} = 55\,\frac{mi}{hr} \times \frac{5280\ ft}{1\ mi} \times \frac{1\ hr}{60\ min} \times \frac{1\ min}{60\ sec}$$

$$= \frac{55 \times 5280}{60 \times 60} \times \frac{mi}{mi} \times \frac{hr}{hr} \times \frac{min}{min} \times \frac{ft}{sec} = 80\,\frac{2}{3}\,\frac{ft}{sec}$$

---

تمرین : از یك واحد فزیکی به دیگر واحد فزیکی تبدیل کنید .

17. $120\,\frac{mi}{hr}\ ,\ \Longrightarrow\ \frac{ft}{sec}$

18. $3600\ cm^2\ ,\ \Longrightarrow\ m^2\ .$

19. $50\,\frac{kg}{L}\ ,\ \Longrightarrow\ \frac{g}{cm^3}$ $(1\ L = 1000\ cm^3)$

20. $\frac{\$\,72}{day}\ ,\ \Longrightarrow\ \frac{¢}{hr}\ .$

---

## تمرین 2 - 10

این محاسبات را بدون تغیر واحد در صورت امکان ساده سازید .

1. $36\ ft \times \frac{1yd}{3\ ft}$

2. $6\ lb \times \frac{16\ oz}{1\ Lb}$

3. $6kg \times 8\frac{hr}{kg}$

4. $9\frac{km}{h}$

5. $3cm \times \frac{2g}{2cm}$

6. $\frac{9km}{3days} \times 6days$

7. $6m + 2m$

8. $10tons + 6\ tons$

9. $5\ ft^3 + 7\ ft^3$

10. $10yd^3 + 17yd^3$

11. $\frac{3kg}{5m} \times \frac{7kg}{6m}$

12. $3acres \times 60\frac{1}{acre}$

13. $\frac{2000\ lb \times (6\ mi / hr)^2}{100\ ft}$

14. $\frac{7m \times 8kg / sec}{4sec}$

15. $\frac{6cm^2 \times 5cm / sec}{2\ sec^2 / cm^2 \times 2(1 / kg)}$

16. $\frac{320\ lb \times (5ft / sec)^2}{2 \times 32\ (ft / sec^2)}$

**تمرین :**

واحد های ذیل را بطریقهٔ « تعویض » یا « ضرب به 1 » تبدیل نمائید :

17. 72 in , ===> ft

18. 17 hr . ===> min

19. 2 روز ===> sec

20. 360 sec , ===> hr .

21. $60 \frac{kg}{m}$ , ===> g / cm

22. $44 \frac{ft}{sec}$ , ===> mi / hr

23. $216 m^2$ , ===> $cm^2$

24. $60 \frac{lb}{ft^3}$ , ===> ton / $yd^3$

25. $\frac{\$ 36}{روز}$ , ===> $\frac{¢}{hr}$

26. 1440 نفرساعت ===> نفر روز

⊕ 27. $1.73 \frac{mL}{sec}$, ===> $\frac{L}{hr}$

28. $1800 \frac{g}{L}$ , ===> $\frac{cg}{mL}$

⊕ 29. $186,000 \frac{mi}{sec}$ ( سرعت نور ) ===> $\frac{mi}{yr.}$

30. $1100 \frac{ft}{sec}$ ( سرعت صوت ) → $\frac{mi}{yr}$

⊕ ( 365 روز = 1 yr . )
L = 1000 mL

برای تبدیل کردن واحدها از جدول فزیک استفاده نمائید :

31. 🖩 $89.2 \frac{ft}{sec}$ , ===> m / min

32. 🖩 $1013 yd^3$ , ===> $m^3$

33. $640\ mi^2 \Longrightarrow km^2$

34. $312.2\ \frac{kg}{m} \Longrightarrow lb/ft$

35- اگر وزن یك میلهٔ فولادی به ( طول — 2 cm ) , 5gr باشد . وزن همین نوع میله فولادی چند خواهد بود ، در صورتیکه طول آن

( الف ) 3 cm اندازه شود ؟ ( ب ) 5m شود ؟

36- در تمرین 35 طول میله چند خواهد بود . اگر وزن میله 4.3g و 20cg باشد ؟

در کیمیا ، یك « مول » یك شی عبارت از آن کتله است به گرام که مساوی است به وزن مالیکولی همان شی . بطور مثال : یك « مول » اکسیجن 32 گرام است. زیرا وزن مالیکلولی آن 32 است . یك « مول » نیون 20.2 گرام است .

– به گرام تبدیل نمائید :

37. 50 مول اکسیجن

38. 44 مول نیون

– به « مول » تبدیل کنید .

39. 303 گرام نیون

40. 377.7 گرام اکسیجن

41- معادله « نسبی انیشتین » بیان میکند که : $E = mc^2$

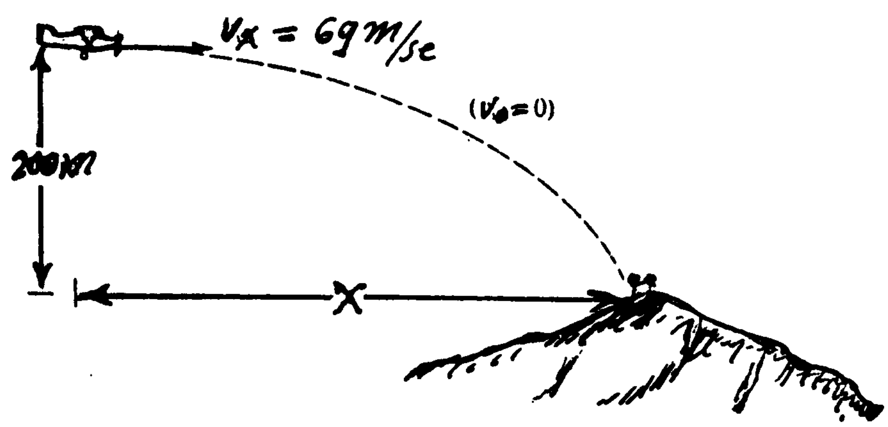
_ E مقدار انرژی است که از کتله (m) تولید و c ، سرعت نور است . یك بمب اتوم منفجر میشود که شامل 5000gr یورانیم رادیواکتیو میباشد . سرعت نور $2.9979 \times 10^8$ متر فی ثانیه است . مقدار انرژی را که از انفجار این بمب بوجود می آید : معلوم کنید .

42- کثافت، عبارت است از کتله تقسیم بر حجم ( D = m / v )، (کثافت پوتاشیم = 0.86g / mL ) است . کتله $18cm^3$ پوتاشیم چند خواهد بود .

کمک : $1 mL = 1 cm^3$ .

مثالهای جاری

43- یك طیاره ، عملهٔ نجات میخواهد که مقدار البسه و مواد پروتونی را برای یك تعداد مجاهدین که در قله یك کوه عملیات میکنند ، برساند . اگر سرعت طیاره موصوف به مسیر افقی مساوی به ( 69 m / sec ) بوده و ارتفاع همین طیاره از قله کوه ( 400 m ) باشد شما در یافت کنید که مواد مورد ضرورت به کدام فاصله دور تر از طیاره ازادانه رها شود .




در سقوط آزاد ..................... $h = 1/2\ gt^2$

$$t = \sqrt{2gh}$$

$$t = \sqrt{(2)(200)(9.80)} = 6.39\ sec .$$

وقتیکه مواد بزمین میرسد ... $t = 6.39\ sec$

از طرف دیگر سرعت مساوی است

$$V = \frac{d}{t} = \frac{x}{t} \ ,$$

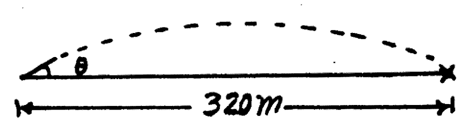
$$x = Vt = (69)(6.39) = 400\ m$$

مواد باید به فاصله 400 متر دور از طیاره رها شود .

-44 یك توپ به سرعت 60m / sec مرمی را فیر میکند . زاویه فیر این توپ را در صورت دریافت کنید که به فاصله 320 m دو تر هدف را زده بتواند .

$$R = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g} \ , \quad \sin 2\theta = \frac{Rg}{V_0^2} \qquad (\text{اندازه مسافه})$$

$$\sin 2\theta = \frac{(320)(9.8)}{(60)} = 0.871$$

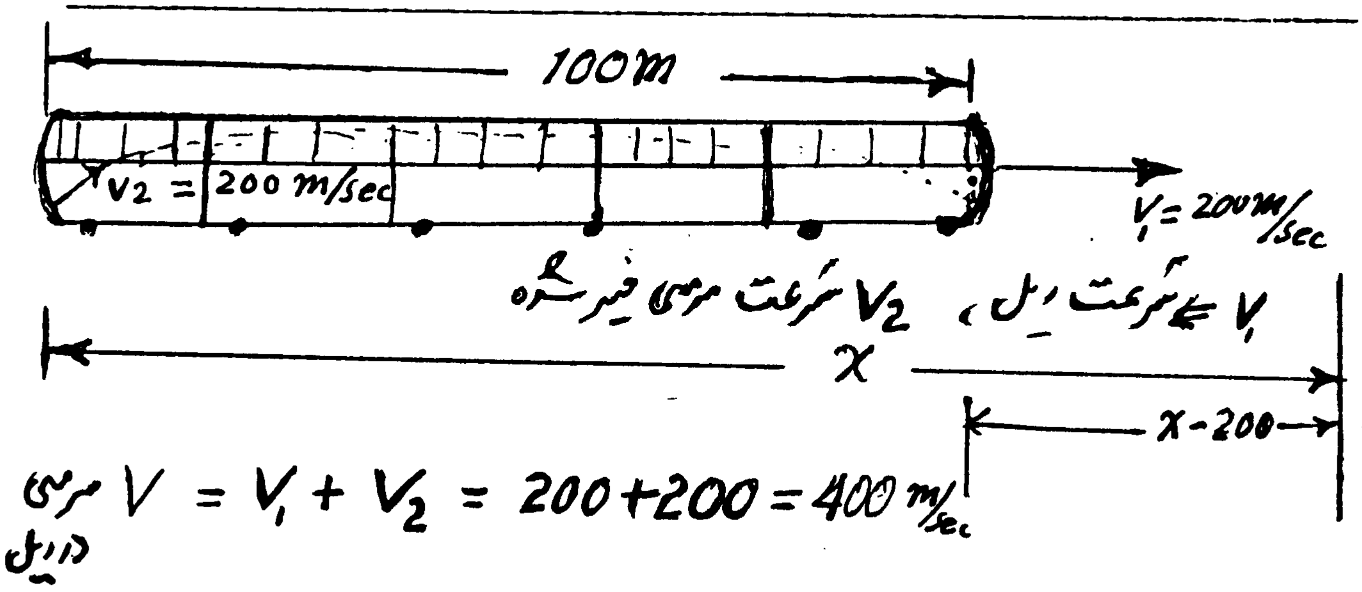



$$\sin 2\theta = 0.871 \ , \ 2\theta = 60.6^{o} \quad \text{یا} \quad \theta = 30.3^{o}$$

-45 یك ریل 100 متر طول دارد ، و به سرعت 200 m / sec در حرکت است . یك نفر که در نقطه اخر ریل موقعیت دارد میخواهد که یك نفر دیگر که در حصه اول ریل چوکی گرفته آنرا به ضرب گلوله از پا در آورد . اگر فیر مرمی تفنگ نفر دوم مساوی به سرعت ریل باشد شما در یافت کنید که :

الف : آیا این نفر میتواند نفر اولی را بزند .

ب : نشان تفنگ را به چند متری فاصله عیار بسازد تا هدف را بصورت درست گرفته بتواند .




سرعت ریل 200 m / sec . . . . . است ، سرعت مرمی در ریل 400 m / sec است.از طرف دیگر :

$$\text{ساعت} = \frac{\text{فاصله}}{\text{وقت}} = \frac{x}{t}$$

مرمی هنگامی به هدف میخورد که فاصله طی شده توسط هدف و مرمی یکسان ، x فاصله ) باشد .

$$\text{سرعت مرمی} = 400 = \frac{x}{t} \quad . \qquad \text{سرعت هدف} = 200 = \frac{x - 100}{t}$$

$$x = 400\,t \qquad\qquad x = 200\,t + 100$$

لهذا

$$400\,t = 200\,t + 100$$

$$200\,t = 100$$

$$t = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}\ \text{sec}\ .$$

قیمت t را در یکی از معادله های (سرعت) وضع مینمائیم :

$$400\,t = x$$

$400\,(1/2) = 200\ m = x$ ,  $x = 200\ m$

به فاصله 200m هدف را میزند . ( نشان تفنگ به 200m عیار شود )

و سلام !

به امید کتاب دوم الجبر ... "کاربرد"

Dec. 1, 1991

# ضمیمه ها

# رهنمای حل تمرین های کورس الجبر

## (مبادی الجبر)

این رهنما طرق حل و جوابات تمام سوالات، پرابلم ها و تمرین هاییکه در کتاب «مبادی الجبر» شامل میباشند، بدسترس شاگردان محترم این کورس بوجه احسن تقدیم میدارد. در تهیه این رهنماء (مسؤلاً) سعی بخرچ داده شده است تا تمام مراحل ضروری سوالات عبارتی و تمرین ها، جهت سهولت کار های عملی (آموزش حرکی شاگردان) بوجه آسانتر نشان داده شود.

مؤلف، نظر به تجارب چندین ساله در تدریس مضامین ساینسی و انجنیری، عقیده راسخ دارد، که در کتب ساینسی و تخنیکی جوابات تمرینات و سوالات بدسترس شاگردان گذاشته شوند. آشکار شدن جوابات تمرین ها، شاگرد را بیشتر تشویق مینماید تا با جدوجهد زیاد، تمرین را حل نموده و خود را به هدف که عبارت از جواب تمرین است برساند. تهیه جوابات از یك طرف مدرس (معلم) را کمك میکند و از طرف دیگر به شاگرد زمینه تشویق و ترغیب بیشتر حاصل میگردد که جواب (هدف) پرابلم را بدست بیاورد. داشتن جوابات تمرین ها، مفهوم «متکی بخود بودن» (Self Actualization) شاگرد را بیشتر تقویه مینماید.

علمای تعلیم و تربیه به این عقیده میباشند که شاگردان در پروسه آموزش به کمك و رهنمائی عاجل و آنی بیشتر ضرورت دارند. زیرا شاگرد در اثنای تدریس درس جدید با معلومات جدید و تازه روبرو میشود، در این اثنا اگر کمك آنی و عاجل به شاگرد مهیا نگردد، شاگرد خود را عاجز می بیند که این معضله در منصه تکامل، خود شاگرد را از

## تمرین :

از 14 --> 19 ضرب و ساده سازید :

14. $8^{-3} \times 8^{7}$

15. $y^{7} y^{-2}$

16. $(9x^{4})(-2x^{7})$

17. $(-3x^{-4})(25x^{-10})$

18. $(5x^{-3}y^{4})(-2x^{9}y^{-2})$

19. $(4x^{-2}y^{4})(15x^{2}y^{-3})$

---

## عملیه تقسیم :

با در نظر داشت قضیهٔ پنجم ،

مثال های ذیل را در نظر بگیرید:

$8^{5} / 8^{3} = 8^{5} \times 1/8^{3} = 8^{5} \times 8^{-3} = 8^{5-3} = 8^{2}$

$7^{-2} / 7^{3} = (7^{-2})(7^{-3}) = 7^{-2-3} = 7^{-5}$

## قضیه ششم

برای هر قیمت غیر صفر a و اعداد تام m ، وn : میتوان نوشت :

$$a^{m} / a^{n} = a^{m-n}$$

یاد گرفتن بازداشته ، و گاهی هم اتفاق می افتد که شاگرد در مقابل این مضمون دلسردی کامل نشان داده، حتی عقده بگیرد که مطالعه مضمون ساینسی را بکلی ترك بگوید. زیرا وقتی یکجوان خود را در اجراء و انجام یك مسؤلیت عاجز احساس نماید، این وضع شاگرد را مایوس و دلسرد میسازد که منجر به ترك وی از مسلك میشود.

از جانب دیگر گنجانیدن جوابات تمرین ها در کتب ساینس و انجنیری یك ممد درسی بسیار مؤثر میباشد که شاگردان را به مطالعه و جستجوی تلاش های شخصی بیشتر تشویق می نماید. پیشنهاد کردن اصول تدریس خوب تر برای یك کورس کاری است، بس مشکل . اصول تدریس و طریقه پروسه آموزش برای هر صنف مختلف میباشد. پس پیشنهاد میشود که هر استاد با درنظرداشت تیوری های تعلیم و تربیه و طبقه بندی کلمات مشخص اهداف که از طرف عالم مشهور تعلیم و تربیه (Bloom) پیشنهاد گردیده، اصول تدریس مشخص را در کار خود سرمشق قرار بدهد.

هر مدرس (معلم) باید در تدریس خویش آن طریق اصول تدریس را اختیار نموده انکشاف بدهد که در نهایت ارزیابی بیشتر موفق ثابت گردد. با وصف این همه معلومات تیوری های آموزش، عوامل ذیل را پیشنهاد می نماید که مدرسین (معلمین) آنرا در اثنای تدریس در نظر گرفته باشند.

۱ـ پروسه آموزش وقتی بیشتر مؤثر واقع میشود که شاگرد در پروسه تدریس (آموزش) فعالانه سهم بگیرد.

۲ـ بالای پروسه آموزش، تجارب ذهنیت (عادت ها) و ارزش های سابقه شاگرد تاثیر مستقیم دارد. (موضوع تدریس باید با تجارب و سویه گذشته شاگرد تسلسل داشته باشد) .

۳ـ پروسه آموزش، وقتی بسیار مؤثر و مفید واقع میشود که خود آموزنده (شاگرد) آموختن این رشته علمی را بحیث یك مسؤلیت بسیار مهم و مفید برای خود قبول نماید.

٤ـ در بوجود آوردن حالت مؤثر پروسه آموزش، شناخت، تشخیص و تهیه کردن تمام

سهولت های لازم در جهت برآوردن مرام شاگرد امریست حتمی (لوازم درسی، و سهولت های آموزش) .

۵ـ آموزش وقتی بسیار مؤثر میباشد که به آموزنده (شاگرد اجازه داده شود تا در یك محیط فاقد ترس و خطر کار و عمل نماید.

وَمِنَ اللّٰهِ تَوفیق

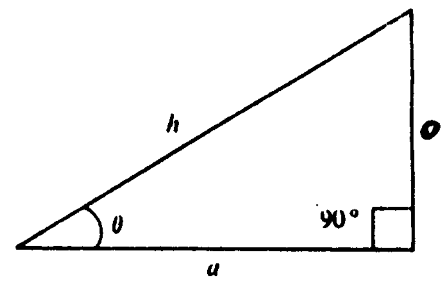
## ضمیمه اول: فورمول ها ومطابقت‌های مثلثاتی

### توابع مثلثاتی

$\sin \theta = \frac{o}{h}$ $\quad$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{h}{o}$

$\cos \theta = \frac{a}{h}$ $\quad$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{h}{a}$

$\tan \theta = \frac{o}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\quad$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{a}{o}$




$a^2 + o^2 = h^2$ قضیه فیثاگورین

### مطابقتهای مثلثاتی

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \qquad \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \qquad \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

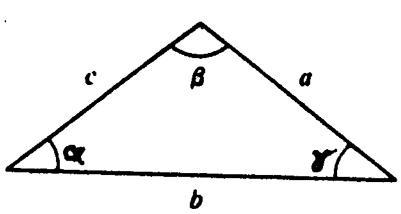
$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \qquad \cos \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \qquad \tan \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \left(\frac{A \pm B}{2}\right) \cos \left(\frac{A \mp B}{2}\right)$$

### برای هرمثلث ( مثلث کیفی)



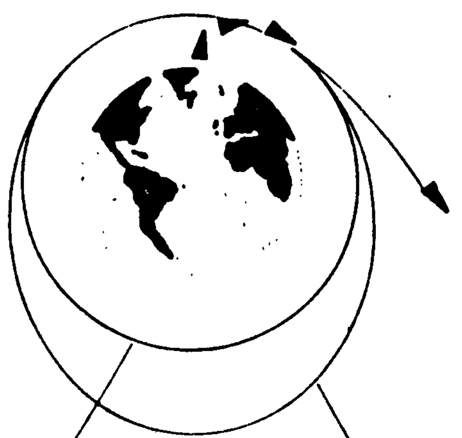

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$ ( قانون ساین )

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$ ( قانون کوساین )

## ضمیمه دوم : الف : معلومات ساینسی

شکل ذیل حالت پرتاب سفینه فضایی را نشان میدهد

دوران اولی ان بهمسیر بیضوی وبعدی ان دایروی میگردد.

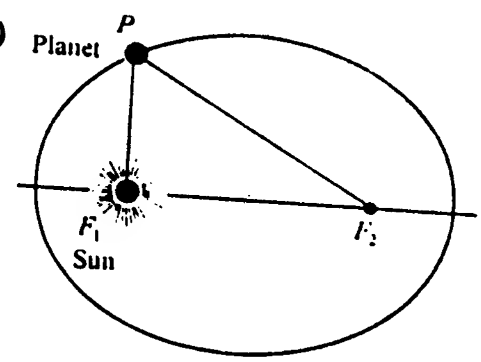



مساحت‌ها و حجم ها :

| حجم | مساحه سطحی | شی |
|---|---|---|
| $\frac{4}{3}\pi r^3$ | $\pi r^2$ | دایره به‌شعاع (r) |
| | $4\pi r^2$ | کره‌به‌شعاع (r) |
| $\pi r^2 h$ | $2\pi r^2 + 2\pi rh$ | استوانه‌به‌شعاع (r) وارتفاع h |

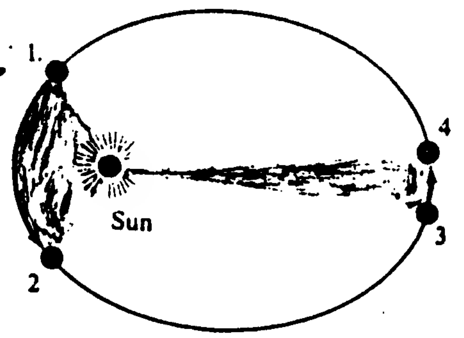
## ب : معلومات ساینسی

قانون اول کیپلر




(۱) افتاب دریکی ازمراکز بیضوی نظر به سیاره ها موقعیت دارد .

قانون دوم کیپلر




(2) زمین در موقعیت های مختلف سیاره نظر به افتاب • مساحت ها مساوی بوده ( سرعت سیاره درحالت (۱-۲) نظریه تیزتر است .

(3) معلومات ( امار ) که به قانون سوم کیپلر تطبیق میشود

جدول ذیل معلومات ساینسی درمورد (۹) سیاره ارائه میدارد. $R^3/T^2$

| سیاره | اوسط فاصله از افتاب ( $10^6$ km) | پیریود (T) (سالهای زمین) | ( $\frac{km^3}{yr^2}$ X$10^{24}$ ) |
|---|---|---|---|
| ۱- عطارد Mercury | 57.9 | 0.24 | 3. 34 |
| ۲- زهره Venus | 108.2 | 0.615 | 3.35 |
| ۳- زمین Earth | 149.6 | 1.0 | 3.35 |
| ۴- مریخ Mars | 277.9 | 1.88 | 3.35 |
| ۵- جوپیتر Jupiter | 778.3 | 11.86 | 3.35 |
| ۶- ساترن Saturn | 1427 | 29.5 | 3.34 |
| ۷- یورانوس Uranus | 2870 | 84.0 | 3.35 |
| ۸- نیپتون Neptune | 4497 | 165 | 3.34 |
| ۹- پلتو Pluto | 5900 | 248 | 3.33 |

## ضمیمه سوم : فورمول ها ومطابقت های عمومی الجبر :

فورمول حل معادله درجه دوم ( فورمول محمد بن موسی )

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

انکشاف های نومیل

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$(x + y)^n = x^n\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n = x^n\left[1 + n\frac{y}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{y^2}{x^2} + \cdots\right]$$

انکشاف های دیگر ریاضیات

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2}{15}\theta^5 + \cdots \qquad |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = f(0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

## ضمیمه چارم: واحدات فزیکی

### Length طول

1 in = 2.54 cm
1 cm = 0.394 in
1 ft = 30.5 cm
1 m = 39.4 in = 3.28 ft
1 mi = 5280 ft = 1.61 km
1 km = 0.621 mi
1 nautical mile = 6080 ft = 1.85 km
1 fermi = 1 femtometer (fm) = $10^{-15}$ m
1 angstrom (Å) = $10^{-10}$ m
1 light-year = $9.46 \times 10^{15}$ m
1 parsec = 3.26 light-years

### Time وقت

1 day = $8.64 \times 10^4$ s
1 year = $3.156 \times 10^7$ s

### Speed سرعت

1 mi/h = 1.47 ft/s = 1.61 km/h = 0.447 m/s
1 km/h = 0.278 m/s = 0.621 mi/h
1 ft/s = 0.305 m/s = 0.682 mi/h
1 m/s = 3.28 ft/s = 3.60 km/h
1 knot = 1.151 mi/h = 0.5144 m/s

### Angle زاویه

1 radian (rad) = 57.30° = 57°18′
1° = 0.01745 rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

### Mass کتله

1 atomic mass unit (u) = $1.6605 \times 10^{-27}$ kg
1 slug = 14.6 kg
1 kg = 0.0685 slug
[1 kg has a weight of 2.21 lb where g = 9.80 $m/s^2$.]

### Force قوه

1 lb = 4.45 N
1 N = $10^5$ dyne = 0.225 lb

### Energy and Work انرژی وکار

1 J = $10^7$ ergs = 0.738 ft·lb
1 ft·lb = 1.36 J = $1.29 \times 10^{-3}$ Btu = $3.25 \times 10^{-4}$ kcal
1 kcal = $4.18 \times 10^3$ J = 3.97 Btu
1 Btu = 252 cal = 778 ft·lb = 1054 J
1 eV = $1.602 \times 10^{-19}$ J
1 kWh = $3.60 \times 10^6$ J = 860 kcal

### Power توان

1 W = 1 J/s = 0.738 ft·lb/s
1 hp (U.S.) = 550 ft·lb/s = 746 W
1 hp (metric) = 750 W

### Pressure فشار

1 atm = 1.013 bar = $1.013 \times 10^5$ $N/m^2$
= 14.7 $lb/in^2$ = 760 torr
1 $lb/in^2$ = $6.90 \times 10^3$ $N/m^2$
1 Pa = 1 $N/m^2$ = $1.45 \times 10^{-4}$ $lb/in^2$

## SI Derived Units and Their Abbreviations

| *Quantity* | *Unit* | *Abbreviation* | *In terms of base units*† |
|---|---|---|---|
| Force | newton | N | $kg \cdot m/s^2$ |
| Energy and work | joule | J | $kg \cdot m^2/s^2$ |
| Power | watt | W | $kg \cdot m^2/s^3$ |
| Pressure | pascal | Pa | $kg/(m \cdot s^2)$ |
| Frequency | hertz | Hz | $s^{-1}$ |
| Electric charge | coulomb | C | $A \cdot s$ |
| Electric potential | volt | V | $kg \cdot m^2/(A \cdot s^3)$ |
| Electric resistance | ohm | Ω | $kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^3)$ |
| Capacitance | farad | F | $A^2 \cdot s^4/(kg \cdot m^2)$ |
| Magnetic field strength | tesla | T | $kg/(A \cdot s^2)$ |
| Magnetic flux | weber | Wb | $kg \cdot m^2/A \cdot s^2$ |
| Inductance | henry | H | $kg \cdot m^2/(s^2 \cdot A^2)$ |

† kg = kilogram (mass), m = meter (length), s = second (time), A = ampere (electric current).

## Metric (SI) Multipliers

| *Prefix* | *Abbreviation* | *Value* |
|---|---|---|
| Tera | T | $10^{12}$ |
| Giga | G | $10^9$ |
| Mega | M | $10^6$ |
| Kilo | k | $10^3$ |
| Hecto | h | $10^2$ |
| Deka | da | $10^1$ |
| Deci | d | $10^{-1}$ |
| Centi | c | $10^{-2}$ |
| Milli | m | $10^{-3}$ |
| Micro | μ | $10^{-6}$ |
| Nano | n | $10^{-9}$ |
| Pico | p | $10^{-12}$ |
| Femto | f | $10^{-15}$ |

| *Quantity* | *Symbol* | *Approximate value* | *Current best value*† |
|---|---|---|---|
| Speed of light in vacuum | $c$ | $3.00 \times 10^{8}$ m/s | $2.99792458 \times 10^{8}$ m/s |
| Gravitational constant | $G$ | $6.67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg² | $6.67259(85) \times 10^{-11}$ N·m²/kg² |
| Avogadro's number | $N_A$ | $6.02 \times 10^{23}$ mol$^{-1}$ | $6.0221367(36) \times 10^{23}$ mol$^{-1}$ |
| Gas constant | $R$ | 8.315 J/mol·K = 1.99 cal/mol·K = 0.082 atm·liter/mol·K | 8.314510(70) J/mol·K |
| Boltzmann's constant | $k$ | $1.38 \times 10^{-23}$ J/K | $.380658(12) \times 10^{-23}$ J/K |
| Charge on electron | $e$ | $1.60 \times 10^{-19}$ C | $.60217733(49) \times 10^{-19}$ C |
| Stefan-Boltzmann constant | $\sigma$ | $5.67 \times 10^{-8}$ W/m²·K⁴ | $.67051(19) \times 10^{-8}$ W/m²·K⁴ |
| Permeability of free space | $\mu_0$ | $4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A | |
| Permittivity of free space | $\varepsilon_0 = (1/c^2\mu_0)$ | $8.85 \times 10^{-12}$ C²/N·m² | $.854187817\ldots \times 10^{-12}$ C²/N·m² |
| Planck's constant | $h$ | $6.63 \times 10^{-34}$ J·s | $6260755(40) \times 10^{-34}$ J·s |
| Electron rest mass | $m_e$ | $9.11 \times 10^{-31}$ kg = 0.000549 u = 0.511 MeV/$c^2$ | $1093897(54) \times 10^{-31}$ kg = $5.48579903(13) \times 10^{-4}$ u |
| Proton rest mass | $m_p$ | $1.6726 \times 10^{-27}$ kg = 1.00728 u = 938.3 MeV/$c^2$ | $6726231(10) \times 10^{-27}$ kg = 1.007276470(12) u |
| Neutron rest mass | $m_n$ | $1.6750 \times 10^{-27}$ kg = 1.008665 u = 939.6 MeV/$c^2$ | $5749286(10) \times 10^{-27}$ kg = 1.008664904(14) u |
| Atomic mass unit (1 u) | | $1.6605 \times 10^{-27}$ kg = 931.5 MeV/$c^2$ | $5605402(10) \times 10^{-27}$ kg = 931.49432(28) MeV/$c^2$ |

## Values of Some Numbers

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\pi = 3.1415927$ | $\sqrt{2} = 1.4142136$ | $\ln 2 = 0.6931472$ | $\log_{10} e = 0.4342945$ |
| $e = 2.7182818$ | $\sqrt{3} = 1.7320508$ | $\ln 10 = 2.3025851$ | $1 \text{ rad} = 57.2957795^\circ$ |

## Mathematical Signs and Symbols

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\propto$ | is proportional to | | |
| $=$ | is equal to | $\leqslant$ | is less than or equal to |
| $\approx$ | is approximately equal to | $\geqslant$ | is greater than or equal to |
| $\neq$ | is not equal to | $\sum$ | sum of |
| $>$ | is greater than | $\bar{x}$ | average value of $x$ |
| $\gg$ | is much greater than | $\Delta x$ | change in $x$ |
| $<$ | is less than | $\Delta x \to 0$ | $\Delta x$ approaches zero |
| $\ll$ | is much less than | $n!$ | $n(n-1)(n-2)\ldots(1)$ |

## The Greek Alphabet

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Alpha | Α | α | Nu | Ν | ν |
| Beta | Β | β | Xi | Ξ | ξ |
| Gamma | Γ | γ | Omicron | Ο | ο |
| Delta | Δ | δ | Pi | Π | π |
| Epsilon | Ε | ε | Rho | Ρ | ρ |
| Zeta | Ζ | ζ | Sigma | Σ | σ |
| Eta | Η | η | Tau | Τ | τ |
| Theta | Θ | θ | Upsilon | Υ | υ |
| Iota | Ι | ι | Phi | Φ | ϕ, φ |
| Kappa | Κ | κ | Chi | Χ | χ |
| Lambda | Λ | λ | Psi | Ψ | ψ |
| Mu | Μ | μ | Omega | Ω | ω |

## Other Useful Data

| | |
|---|---|
| Joule equivalent (1 cal) | 4.184 J |
| Absolute zero (0 K) | −273.15°C |
| Earth: | |
| Mass | $5.98 \times 10^{24}$ kg |
| Radius (mean) | $6.38 \times 10^{6}$ m |
| Moon: | |
| Mass | $7.4 \times 10^{22}$ kg |
| Radius (mean) | $1.74 \times 10^{6}$ m |
| Sun: | |
| Mass | $2.0 \times 10^{30}$ kg |
| Radius (mean) | $7 \times 10^{8}$ m |
| Earth-sun distance (mean) | $1.50 \times 10^{11}$ m |
| Earth-moon distance (mean) | $3.84 \times 10^{8}$ m |

| | جوابات از صفحه ۱۸...... تا ۲۱ |
|---|---|
| | ۱۰۱، صفحه ۱۸ |
| -:1 | اعداد طبیعی 14, 13 |
| -:2 | اعداد تام 14,3, 0 |
| -:3 | اعداد غیرناطق $\sqrt[3]{2}, -\sqrt{7}, \sqrt{3}$ |
| -:4 | اعداد ناطق از: $-2, -\frac{1}{2}, 0, -6$ |
| | $8.53, -\frac{9}{4}, 14, \frac{5}{8}, 9\frac{1}{2}$ |
| -:5 | اعداد تام 14,-2,3,0,-6 |
| -:6 | اعداد حقیقی $-\frac{1}{2}, 3, 0, -6$ |
| | $\frac{5}{8}, \sqrt[3]{2}, -\sqrt{7}, -2, \sqrt{3}, 9\frac{1}{2}$, |
| | $8.53, -\frac{9}{4}, 14$ |
| -:7 | $\frac{6}{5}$ ـ ناطق است |
| -:8 | ناطق |
| -:9 | 9.032 ـ ناطق است |
| -:10 | ناطق |
| -:11 | $4.5165\overline{16}$ ناطق است |
| -:12 | ناطق |
| -:13 | غیرناطق است |
| -:14 | غیر ناطق است |
| -:15 | $\sqrt{6}$ غیر ناطق است |

| | |
|---|---|
| -:16 | غیر ناطق |
| -:17 | $-\sqrt{14}$ ـ غیر ناطق است |
| -:18 | ناطق است |
| -:19 | ناطق ← $\sqrt{49}$ |
| -:20 | ناطق است |
| -:21 | غیر ناطق ← $\sqrt[3]{5}$ |
| -:22 | غیر ناطق |
| -:23 | $/12/= 12$ |
| -:24 | 2.56 |
| -:25 | $/-47/= 47$ |
| -:26 | 0 |
| -:27 | $-1X(-7)= 7$ |
| -:28 | $\frac{10}{3}, \frac{10}{3}$ |
| -:29 | $-(57)= -57$ |
| -:30 | -13/14 , -13/14 |
| -:31 | -87 |
| -:32 | -107 |
| -:33 | -16 |
| -:34 | 12 |
| :35 | -10.3 |

**مثالها:** تقسیم نموده ساده سازید :

8. $9^{-2} / 9^{5} = 9^{-2-5} = 9^{-7}$

9. $7^{-4} / 7^{-5} = 7^{+1} = 7$

10. $x^{10} / x^{8} = x^{2}$

11. $y^{-5} / y^{-8} = \quad = y^{3}$

با استفاده از مفهوم قضیه ششم ، میتوانیم نشان بدهیم که $a^0$ تعریف شده نمیتواند در صورتیکه $(a=0)$ قیمت بگیرد .

$a^0 = a^{1-1} = a / a = 1$ . . (هر عدد به توان صفر مساوی به یک است)

اگر a مساوی صفر باشد ، $(a)^0$ مفهوم ندارد .

## ارتقای توان به توان :

مثال : $(5^2)^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^8$

توان کل به توان فرعی ضرب میشود . ............ $(5^2)^4 = 5^8$

## قضیه هفتم :

برای هر عدد a و هر اعداد تام m ، و n میتوان نوشت :

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

**مثالها:**

ساده سازید :

12. $(8^{-2})^{3} = 8^{-2\cdot 3} = 8^{-6}$

13. $(x^{-5})^{4} = x^{-20}$

14. $(3x^{2}y^{-2})^{3} = 3^{3}(x^{2})^{3}(y^{-2})^{3}$

$= 3^{3}x^{6}y^{-6} = 27x^{6}y^{-6}$

| | |
|---|---|
| -:36 | -416 |
| -:37 | 39/10 |
| -:38 | -20 |
| -:39 | 28 |
| -:40 | 12 |
| -:41 | -49.2 |
| -:42 | -48 |
| -:43 | 210 |
| -:44 | 16.33 |
| -:45 | -833/5 |
| -:46 | 598/5 |
| -:47 | 5 |
| -:48 | -7 |
| -:49 | $-\frac{1}{7}$ |
| -:50 | -5 |
| -:51 | -3/49 |
| -:52 | 7/10 |
| -:53 | 25 |
| -:54 | 8 |
| -:55 | -4 |
| -:56 | -29 |
| -:57 | 18 |
| -:58 | -9 |

| | |
|---|---|
| -:59 | -11.6 |
| -:60 | -34.8 |
| -:61 | $-\frac{7}{2}$ |
| -:62 | 9 |
| -:63 | ,1.9881,196<br>1.999990, 1.999962,1.999396 |
| -:64 | ,9.938375 ,9.261 ( a )<br>9.999935,9.999517,9.993948<br>$3\sqrt{10}$(b) |
| -:65 | خواص جمعی مطابقت |
| -:66 | یکجائی ضرب |
| -:67 | توزیعی ضرب بالای جمع |
| -:68 | اتحادیت جمع |
| -:69 | یکجائی از جمع |
| -:70 | مشخصه ضربی ومطابقت |
| -:71 | اتحادیت ضرب |
| -:72 | توزیعی ضرب بالای جمع |
| -:73 | مشخصه معکوسی ضربی |
| -:74 | مشخصه معکوس جمعی |
| -:75 | $2 \neq -2$ |
| -:76 | $\frac{1}{2}$ |
| -:77 | 8#2 $8 \neq 2$ |

| | |
|---|---|
| -:78 | 0 |
| -:79 | $X<3$  $X>3$ |
| -:80 | 1 |
| -:81 | 371/99 |
| -:82 | (183,062)/9990 |
| -:83 | (12,346,418)/999,900 |

1.2

| | |
|---|---|
| -:1 | 2  ($2^{-1}$) |
| -:2 | -1 3 |
| -:3 | 1 |
| -:4 | 1 |
| -:5 | $4^3$ |
| -:6 | $5^3$ |
| -:7 | $6X^5$ |
| -:8 | $12y^7$ |
| -:9 | $15\ a^{-1}\ b^5$ |
| -:10 | $12\ X^{-3}\ Y^7$ |
| -:11 | $72X^5$ |
| -:12 | $432\ Y^5$ |
| -:13 | $-18X^7YZ$ |
| -:14 | $-10X^6YZ$ |
| -:15 | $b^3$ |
| -:16 | $a^7$ |
| -:17 | $X^3\ Y^{-3}$ |
| -:18 | $X^4\ Y^{-5}$ |
| -:19 | 1 |
| -:20 | 1 |
| -:21 | $3ab^2$ |
| -:22 | $6X^3\ Y^2$ |
| -:23 | $4/7\ XYZ^{-5}$ |
| -:24 | $1/3\ X^2\ Y^3\ Z^{-8}$ |
| -:25 | $8a^3\ b^6$ |
| -:26 | $16X^2\ Y^6$ |
| -:27 | $16X^{12}$ |
| -:28 | $81X^8$ |
| -:29 | $-16X^{12}$ |
| -:30 | $-81X^8$ |
| -:31 | $36a^4\ b^6\ c^2$ |
| -:32 | $25X^6\ Y^4\ Z^2$ |
| -:33 | $1/25\ c^2\ d^4$ |

| | |
|---|---|
| -:34 | $1/16X^2 Z^4$ |
| -:35 | 1 |
| -:36 | 1 19 /72 |
| -:37 | 32 |
| -:38 | 25 |
| -:39 | $(27/4)a^8 b^{-10} c^{18}$ |
| -:40 | $(8/9)a^{11} b^{-3} c^{19}$ |
| -:41 | 3/4 Xy |
| -:42 | $8/25\ Xy^2$ |
| -:43 | $5.8X10^7$ |
| -:44 | $2.7X10^4$ |
| -:45 | $3.65X10^5$ |
| -:46 | $3.645X10^3$ |
| -:47 | $2.7X10^{-6}$ |
| -:48 | $6.58X10^{-5}$ |
| -:49 | $2.7X10^{-2}$ |
| -:50 | $3.8X10^{-3}$ |
| -:51 | $\$9.1\ X10^{11}$ |
| -:52 | $9.3\ X10^7$ |

| | |
|---|---|
| -:53 | $4X\ 10^5$ |
| -:54 | 0.0005 |
| -:55 | 0.0062 |
| -:56 | 7,800,000 |
| -:57 | 7,690,000,000,000 |
| -:58 | .000000854 |
| -:59 | 9,460,000,000,000 |
| -:60 | $17X\ 10^{-27}$ |
| -:61 | 25 |
| -:62 | -49,49 |
| -:63 | 1.664, -1.664 |
| -:64 | -3 ,3 |
| -:65 | 9/Xy/=9/X/Y/ |
| -:66 | $y^4$ |
| -:67 | $3a^2$/b/ |
| -:68 | $\frac{4/a/}{b^2}$ |
| -:69 | $X^{8t}$ |
| -:70 | 1 |
| -:71 | $T^{8x}$ |
| -:72 | $M^{2yt}$ |

| | |
|---|---|
| -:73 | $(XY)^{ac+bc}$ |
| -:74 | $(MN)^{x^2}$ |
| -:75 | $9X^{2a}\ Y^{2b}$ |
| -:76 | $\frac{X^{6r}}{Y^{18t}}$ |
| -:77 | $ 750.43 |
| -:78 | $ 728.12 , $791.88 |
| -:79 | $X^9$ غلط است , $x^{10}$ صحیح است |
| -:80 | $X^6/Y^{12}$ |
| -:81 | $8\bar{X}^{12}\ Y^{18}\ Z^{9}$ چار غلطی دارد |

## 1.3 صفحه 42

| | |
|---|---|
| -:1 | درجه ها بالترتیب: 0,1,2,3,4 <br> درجه پولینومیل (4) |
| -:2 | 3, 0 , 1 , 2, (3) |
| -:3 | 0 6, 6, 3, درجه 6 است |
| -:4 | 7 , 0 ,7 ,5 , 2 |
| -:5 | 0,1, 2, 6,5, درجه 6 است |
| -:6 | 8, 0 ,2 ,4 ,8 ,6 |
| -:7 | $3X^2Y - 5XY^2 + 7XY + 2$ |
| -:8 | $2X^2Y - 7XY^2 + 8XY + 5$ |
| -:9 | $-10Pq^2 - 5P^2q + 7Pq - 4P + 2q + 3$ |
| -:10 | $-9Pq^2 - 3P^2q + 11Pq - 6P + 4q + 5$ |
| -:11 | $3X + 2Y - 2Z - 2$ |
| -:12 | $7X^2 + 12Xy - 2X - Y - 9$ |
| -:13 | $5X\sqrt{y} - 4y\sqrt{x} - 2/5$ |
| -:14 | $7X\sqrt{y} - 5y\sqrt{x} + 1$ |
| -:15 | $-5X^3 + 7X^2 - 3X + 6$ |
| -:16 | $4Y^4 - 7Y^2 + 2Y + 1$ |
| -:17 | $-2X^2 + 6X - 2$ |
| -:18 | $-4X^2 + 8XY - 5Y^2 + 3$ |
| -:19 | $6a - 5b - 2C + 4d$ |
| -:20 | $8a - 8b - 2c + 6d$ |
| -:21 | $X^4 - 3X^3 - 4X^2 + 9X - 3$ |
| -:22 | $2X^4 - 5X^3 - 7X^2 + 10X - 5$ |
| -:23 | $9X\sqrt{y} - 3y\sqrt{x} + 9.1$ |
| -:24 | $13X\sqrt{y} - 5y\sqrt{x} + 5/3$ |
| :25 | $-1.047P^2q - 2.479Pq^2 + 8.879Pq - 104.144$ |

-:26 $2859.6XY^{-2}-6153.8XY+7243.4\sqrt{xy}$

$-10,254.12$

**1 . 4**

صـ 52

-:1 $6X^3+4X^2+32X-64$

-:2 $6Y^3+3Y^2+9Y+27$

-:3 $4a^3b^2-10a^2b^2+3ab^3+4ab^2-6b^3+4a^2b$
$-2ab+3b^2$

-:4 $2X^4-X^2Y^2-4X^3y-2Y^4+3XY^3$

-:5 $a^3-b^3$

-:6 $t^3+1$

-:7 $4X^2+8xy+3Y^2$

-:8 $4a^2-8ab+3b^2$

-:9 $12X^3+X^2Y-(3/2)XY-(1/8)Y^2$

-:10 $6Y^4-(1/2)XY^3+(3/5)XY-(1/20)X^2$

-:11 $2X^3-2\sqrt{2}X^2Y-\sqrt{2}XY^2+2Y^3$

-:12 $3Y^3-\sqrt{3}xy^2-2\sqrt{3}y+2x$

-:13 $4X^2+12XY+9Y^2$

-:14 $25X^2+20XY+4y^2$

-:15 $4X^4-12X^2Y+9y^2$

-:16 $16X^4-40X^2Y+25Y^2$

-:17 $4X^6+12X^3Y^2+9Y^4$

-:18 $25X^6+20X^3Y^2+4Y^4$

-:19 $(1/4)X^4-(3/5)X^2Y+(9/25)Y^2$

-:20 $(1/16)X^4-(1/3)X^2y$
$(4/9)Y^2$

-:21 $0.25X^2+0.7XY^2+0.49Y^4$

-:22 $0.09X^2+0.48XY^2+0.64Y^4$

-:23 $9X^2-4Y^2$

-:24 $9X^2-25Y^2$

-:25 $X^4-Y^2Z^2$

-:26 $4X^4-25X^2Y^2$

-:27 $9X^4-2$

-:28 $25X^4-3$

-:29 $4X^2+12XY+9Y^2-16$

-:30 $25X^2+20XY+4Y^2-9$

-:31 $X^4+6X^2Y+9y^2-Y^4$

-:32 $4X^4+4X^2Y+Y^2-Y^4$

33:- $X^4-1$

34:- $Y^4-16$

35:- $16X^4-Y^4$

36:- $625X^4-Y^4$

37:- $0.002601X^2+0.00408XY+0.0016Y^2$

38:- $1.065024X^2-5.184768XY+6.310144Y^2$

39:- $2462.0358X^2-945.0214X-38.908$

40:- $169.625105X^2-711.87827X-546.525$

41:- $Y^3+15Y^2+75Y+125$

42:- $T^3-21T^2+147T-343$

43:- $M^6-6M^4N+12M^2N^2-8N^3$

44:- $27T^6+108T^4+144T^2+64$

45:- $a^{2n}-b^{2n}$

46:- $T^{2a}-3T^a-28$

47:- $X^{3m}-3X^{2m}T^n+3X^mT^{2n}-T^{3n}$

48:- $Y^{3n+3}Z^{n+3}-4Y^4Z^{3n}$

49:- $X^6-1$

50:- $a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}$

51:- $16X^4-32X^3+16X^2$

52:- $-a^4-2a^3b+25a^2+2ab^3-25b^2+b^4$

53:- $X^{a^2-b^2}$

54:- $T^{2m^2+2n^2}$

55:- $a^2+b^2+C^2+2ab+2aC+2bc$

56:- $a^3+b^3+C^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$

57:- $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

58:- $X^5-Y^5$

59:- $M^5+T^5$

60:- $a^8-b^8$

61:- $9a^2+6ab+b^2$

62:- $4X^2-12XY+9Y^2$

63:- $6X^2+6X-12$

64:- $6a^2-5ab-6b^2$

(٩٨) 1.5

-:1

$(M+N)^5$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$(m+n)^5 = m^5 + 5m^4n^1 + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5$

-:2

$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

[3]

$(X-Y)^6$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

$(X-Y)^6 = X^6 - 6X^5Y + 15X^4Y^2 - 20X^3Y^3 + 15X^2Y^4 - 6XY^5 + Y^6$

-:4

$P^7 + 7P^6q + 21P^5q^2 + 35P^4q^3 + 35P^3q^4 + 21P^2q^5 + 7Pq^6 + q^7$

[5]

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$(X^2-3Y)^5 =$

$X^{10} + 15X^8Y + 90X^6Y^2 - 270X^4Y^3 + 405X^2Y^4 - 243Y^5$

-:6

$2187C^7 - 5103C^6d + 5103C^5d^2 - 2835C^4d^3 + 945C^3d^4 - 189C^2d^5 + 21Cd^6 - d^7$

-:7

$(3C+d)^6$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$729C^6 - 1458C^5d + 1215C^4d^2 - 540C^3d^3 + 135C^2d^4 + 18Cd^5 + d^6$

:8

$T^{-12} + 12T^{-10} + 60T^{-8} + 160t^{-6} + 240t^{-4} + 192t^{-2} + 64$

:9 $(X-Y)^3=$

1 1 1

1 2 1

1 3 3 1

$X^3-3X^2Y+3XY^2-Y^3$

:10 $X^5-5X^4Y+10X^3Y^2+ \quad 10X^2Y^3+5XY^4$
$-Y^5$

:11 $X^{-7}+7X^{-6}Y+21X^{-5}Y^2+35X^{-4}Y^3+35X^{-3}-Y^4$
$+21X^{-2}Y^5+7X^{-1}Y^6+Y^7$

:12 $8S^3-36S^2T^2+54ST^4-27T^6$

:13 $a^9 \cdot 18a^7+144a^5-672a^3+2016a-4032a^{-1}+$
$5376a^{-3} \quad 4608a^{-5}+2304a^{-7}-512a^{-9}$

:14 $512X^9+2304X^7+4608X^5+5376X^3+4032X+$
$2016X^{-1}+672X^{-3}+144X^{-5}+18X^{-7}+X^{-9}$

:15 $1+n+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{n}(-1)^n$

:16 $1+3n+\binom{n}{2}3^2+\binom{n}{3}3^3+\dots+$
$\binom{n}{n-2}3^{n-2}+\binom{n}{n-1}3^{n-1}+3^n$

:17 $9-12\sqrt{3}t+18t^2 \quad -4\sqrt{3}\,t^3+t^4$

:18 $125+150\sqrt{5}\,t+375t^2+100\sqrt{5}\,t^3$
$+75t^4+6\sqrt{5}\,t^5+t^6$

-:19 $6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

-:20 24

-:21 $1! = 1$

-:22 1

-:23 $\binom{5}{0}=\frac{5!}{(5-0)!0!} = 1$

-:24 7

-:25 $\frac{8!}{(8-4)!4!} = 70$

-:26 $9!$

-:27 $(a+b)^6$ , $15a^4b^2 \leftarrow$ : [illegible]

-:28 $21X^2y^5$

-:29 $(a-2)^{14} = -745,472a^3$

-:30 $3,897,234X^2$

-:31 $1120X^{12}Y^2$

-:32 $\frac{35}{27}b^{-5}$

-:33 $(2U-3V^2)^{10} \Rightarrow -1,959,552U^5V^{10}$ [illegible]

-:34 $30X\sqrt{x}$ , $30X\sqrt{3}$

-:35 $(X^{-2}+X^2)^4 \Rightarrow X^{-8}+4X^{-4}+6+4X^4+X^8$

-:36 $X^{-3}-6X^{-2}+15X^{-1}-20+15X-6X^2+X^3$

| | |
|---|---|
| $(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$ (1) $99+70\sqrt{2}$ (2) $99-70\sqrt{2}$ (1)-(2) $=140\sqrt{2}$ | -:37 |
| 34 | -:38 |
| $\binom{16}{11} = 4368$ | -:39 |
| $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$ | -:40 |
| $\frac{55}{144}$ | -:41 |
| $90,720X^8Y^6$ | -:42 |
| $-\frac{3\sqrt{c}}{2a}$ | -:43 |
| $-\frac{35}{X^{1/6}}$ | -:44 |
| 20 | -:45 |

**1.6 (vv)**

| | |
|---|---|
| $3ab(6a-5b)$ | -:1 |
| $4XY(X+3Y)$ | 2 |
| $(a+C)(b-2)$ | 3 |
| $(a-2)(X^2-3)$ | 4 |
| $(X+6)(X+3)$ | 5 |
| $(X^2-6)(3X+1)$ | 6 |
| $(3X+5)(3X-5)$ | 7 |
| $(4X-3)(4X+3)$ | 8 |
| $4X(y^2+z)(y^2-z)$ | 9 |
| $5X(y^2+z^2)(y+z)(y-z)$ | 10 |
| $(y-3)^2$ | 11 |
| $(X+4)^2$ | 12 |

**1.6**

| | |
|---|---|
| $(1-4X)^2$ | 13 |
| $(1+5X)^2$ | 14 |
| $(2X+\sqrt{5})(2X-\sqrt{5})$ | 15 |
| $(4X-\sqrt{7})(4X+\sqrt{7})$ | 16 |
| $(XY-7)^2$ | 17 |
| $(XY-8)^2$ | 18 |
| $4a(X+7)(X-2)$ | 19 |
| $Y(7X-4)(3X+2)$ | 20 |
| $(a+b+c)(a+b-c)$ | 21 |
| $(X-Y+Z)(X-Y-Z)$ | 22 |
| $(X+Y+A+B)(X+Y-A-B)$ | 23 |

24 $(R+S+T-V)(R+S-T+V)$

25 $5(y^2+4X^2)(y+2X)(y-2x)$

26 $6(y^2+4X^2)(y-2x)(y+2x)$

27 $(x+2)(X^2-2X+4)$

28 $(y-4)(y^2+4y+16)$

29 $3X^3-\frac{3}{8}=$

$3(X-\frac{1}{2})(X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{4})$

30 $5(Y+\frac{1}{3})(y^2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{9})$

31 $(X+0.1)(X^2-0.1X+0.01)$

32 $(y-0.5)(y^2+0.5y+0.25)$

33 $3(Z-2)(Z^2+2Z+4)$

34 $4(t+3)(t^2-3t+9)$

35 $(a+t)(t^2-at+t^2)(a-t)$

$(a^2+at+t^2)$

36 $(4m^2+y^2)(16m^4-4m^2y^2+y^4)$

37 $2ab(2a^2+3b^2)(4a^4-6a^2b^2+9b^4)$

38 $3a^2X(2X-5a^2)(4X^2+10a^2X+25a^4)$

39 $(X+4.195235)(X-4.195235)$

40 $(X+2.8337)(X-2.8337)$

41 $(6.082763X+3.807887Y)$

$(6.082763X-3.807887Y)$

42 $1.96(X+2.980Y)(X-2.980Y)$

43 $h(3X^2+3Xh+h^2)$

44 $0.02(X+0.005)$

45 $(y^2+12)(y^2-7)$

46 $(X^2+16)(X^2-5)$

$(X^2+16)(X+\sqrt{5})(X-\sqrt{5})$

47 $(Y+\frac{4}{7})(7-\frac{2}{7})$

48 $(X+\frac{4}{5})(X-\frac{1}{5}) = \frac{1}{25}(5X+4)(5X-1)$

49 $(t+0.9)(t-0.3)$

50 $(m-0.1)(m+0.5)$

51 $(X^n+8)(X^n-3)$

52 $(2X^n-3)(2X^n+1)$

53 $(X+b)(X+a)$

54 $(by+a)(ay+b)$

55 $(\frac{1}{2}t-\frac{2}{5})^2$

56 $(\frac{1}{9}r+\frac{1}{12}s)(\frac{4}{3}r+s)$

57 $(5y^m+X^n-1)(5y^m-X^n+1)$

58 $2(X^{2a}+3)(2X^{2a}+5)$

59 $3(X^n-2y^m)(X^{2n}+2X^ny^m+4y^{2m})$

60 $(X^{2a}-t^b)(X^{4a}+X^{2a}t^b+t^{2b})$

15. $(5x^{3}y^{-5}z^{2})^{4} = 5^{4}x^{12}y^{-20}z^{8}$

$= 625\,x^{12}y^{-20}z^{8}$

16. $(4x^{2}y^{-3})^{-4} = 4^{-4}x^{-8}y^{12}$

$= (1/256)x^{-8}y^{12}$

---

تمرین : تقسیم و ساده نمائید :

20. $4^{8}/4^{5}$

21. $5^{4}/5^{-2}$

22. $10^{-5}/10^{9}$

23. $9^{-8}/9^{-2}$

24. $y^{6}/y^{-5}$

25. $10y^{2}/2y^{3}$

26. $42x^{7}y^{6}/-12y^{-3}x^{10}$

27. $(3^{7})^{7}$

28. $(8^{2})^{-7}$

29. $(y^{4})^{-7}$

30. $(2xy)^{3}$

31. $(4x^{-2}y^{7})^{2}$

32. $(3x^{4}y^{2})^{-3}$

33. $(10x^{-4}y^{7}z^{-2})^{3}$

---

## احتیاط :

هنگامیکه توانهای حاصل ضرب را به توان کل داشته باشیم ، باید هر ضریب "به توان کل " بلند برده شود.

مثلاً ......................... $(8x^{2}y^{-2})^{3} = 8^{3}(x^{2})^{3}(y^{-2})^{3}$

## تمرین (تکرار)

ساده نمائید :

27. $(3^{7})^{7} = ?$

28. $(8^{2})^{-7} = ?$

29. $(y^{4})^{-7}$

30. $(2xy)^{3} = ?$

31. $(4x^{-2}y^{7})^{2} = ?$

32. $(3x^{4}y^{2})^{-3} = ?$

33. $(10x^{-4}y^{7}z^{-2})^{3} = ?$

| | |
|---|---|
| 61 | $Y(y-1)^2(y-2)$ |
| 62 | $(X+1)(X^2+1)(X-1)^3$ |
| | (۹۰) **1.7** |
| 1 | $X=0,\ X=1$ |
| 2 | $-2, 1, -1$ |
| 3 | $X=0,\ X=3,\ X=-2$ |
| 4 | تمام اعداد حقیقی ، $\frac{5X}{2}$ |
| 5 | تمام اعداد تعویضی مجازات غیر از $X=-3$ |
| 6 | تمام اعداد حقیقی غیر از ، $X=-2$ |
| 7 | $\frac{1}{X-y}$ |
| 8 | 1 |
| 9 | $\frac{2X^2+13X+15}{7X}$ |
| 10 | $\frac{3X^2-13X-10}{7X}$ |
| 11 | $\frac{a+2}{a-5}$ |
| 12 | $\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a-24}$ |
| 13 | $m+n$ |
| 14 | $a-b$ |
| 15 | $\frac{3X-12}{2X+8}$ |

| | |
|---|---|
| 16 | $\frac{a+1}{a-3}$ |
| 17 | $\frac{1}{X+y}$ |
| 18 | $C-2$ |
| 19 | $\frac{X-y-Z}{X+y+Z}$ |
| 20 | $\frac{a+b-3}{a-b+3}$ |
| 21 | 1 |
| 22 | 2 |
| 23 | $\frac{y-2}{y-1}$ |
| 24 | 1 |
| 25 | $\frac{X+y}{2X-3y}$ |
| 26 | $\frac{5a}{3a-2b}$ |
| 27 | $\frac{3X-4}{(X+2)(X-2)}$ |
| 28 | $\frac{5a+13}{(a+3)(a-3)}$ |
| 29 | $\frac{3y-10}{(y+4)(y-5)}$ |

| | |
|---|---|
| 30 | $\frac{-5y-9}{(y+3)^2}$ |
| 31 | $\frac{4X-8y}{(X+y)(X-y)}$ |
| 32 | $\frac{2a}{(A+1)(a-1)}$ |
| 33 | $\frac{3X-4}{(X-2)(X-1)}$ |
| 34 | $\frac{Y}{(y-2)(y-3)}$ |
| 35 | $\frac{5a^2+10ab-4b^2}{(a+b)(a-b)}$ |
| 36 | $\frac{6a^2+9ab+3b^2+5}{(a+b)(a-b)}$ |
| 37 | $\frac{11X^2-18X+8}{(X+2)(X-2)^2}$ |
| 38 | $\frac{33-32X+9X^2}{(3+X)(3-X)^2}$ |
| 39 | $0$ |
| 40 | $\frac{3}{X+2}$ |
| 41 | $\frac{X+Y}{X}$ |
| 42 | $\frac{a}{a+b}$ |

| | |
|---|---|
| 43 | $\frac{a^2-1}{a^2+1}$ |
| 44 | $\frac{a^2(b-1)}{b^2(a-1)}$ |
| 45 | $\frac{C^2-2C+4}{C}$ |
| 46 | $\frac{X^2\ Y^2}{X^2-XY+y^2}$ |
| 47 | $\frac{XY}{X-Y}$ |
| 48 | $\frac{a+b}{ab}$ |
| 49 | $X-Y$ |
| 50 | $-a-b$ |
| 51 | $\frac{X^2-Y^2}{XY}$ |
| 52 | $\frac{a^2+b^2}{ab}$ |
| 53 | $\frac{1+a}{1-a}$ |
| 54 | $\frac{1-X}{1+X}$ |
| 55 | $\frac{b+a}{b-a}$ |

| | |
|---|---|
| 56 | $\frac{y+x}{y-x}$ |
| 57 | $2X$ [illegible] |
| 58 | $\frac{-1}{X(X+h)}$ |
| 59 | $3X^2+3Xh+h^2$ |
| 60 | $\frac{-2X-h}{X^2(X+h)^2}$ |
| 61 | $X^5$ |
| 62 | $\frac{5X+3}{3X+2}$ |
| 63 | $\frac{12a}{4ab+3b^2}$ |
| 64 | $\frac{10X^2+3Y^2}{4Xy}$ |

| | 1 . 8 (۱۰۸) |
|---|---|
| 1 | $-2$ , $5$ |
| 2 | بلی ، نه خیر |
| 3 | $1$ , $-1$ |
| 4 | بلی |
| 5 | $3$ , $1$ |
| 6 | بلی |
| 7 | $-4$ , $5$ |
| 8 | نه نه |
| 9 | 11 |
| 10 | 1 |
| 11 | $4\|X\|$ |
| 12 | $6\|t\|$ |
| 13 | $\|b+1\|$ |
| 14 | $\|2c-3\|$ |
| 15 | $-3X$ |
| 16 | $-2Y$ |
| 17 | $\|X-2\|$ |
| 18 | $\|Y+8\|$ |
| 19 | 2 |
| 20 | $-2$ |
| 21 | $6\sqrt{5}$ |
| 22 | $4\sqrt{3}$ |
| 23 | $3\sqrt[3]{2}$ |
| 24 | $3\sqrt[3]{5}$ |
| 25 | $\frac{8\|c\|\sqrt{2}}{d^2}$ |
| 26 | $\frac{9c^2\sqrt{2}}{\|d^3\|}$ |

| | |
|---|---|
| | $3\sqrt{2}$ |
| 28 | $4\sqrt{3}$ |
| 29 | $2X^2y\sqrt{6}$ |
| 30 | $2y^2Z\sqrt{15}$ |
| 31 | $3X\sqrt[3]{4y}$ |
| 32 | $2Xy\sqrt[5]{X^2}$ |
| 33 | $2(X+4)\sqrt[3]{(X+4)^2}$ |
| 34 | $2(X+1)\sqrt[3]{9(X+1)}$ |
| 35 | $\sqrt{7b}$ |
| 36 | $\frac{2\sqrt{2ab}}{a}$ |
| 37 | $2$ |
| 38 | $\sqrt{5y}$ |
| 39 | $\frac{1}{2X}$ |
| 40 | $Y\sqrt[3]{5}$ |
| 41 | $\sqrt{a+b}$ |
| 42 | $\sqrt{X^2+Xy+y^2}$ |
| 43 | $\frac{3a}{4b}\sqrt{2b}$ |
| 44 | $\frac{b}{6a}\sqrt{15a}$ |

| | |
|---|---|
| 45 | $\frac{Y}{5Z^2}\sqrt[3]{20X^2Z^2}$ |
| 46 | $\frac{2X}{Y}$ |
| 47 | $8X^2\sqrt[3]{2}$ |
| 48 | $4\sqrt[3]{4X^2}$ |
| 49 | $ab^2\ X^2y\sqrt{a}$ |
| 50 | $Xy^2\ a^3b$ |
| 51 | $-2\sqrt{2} - 12\sqrt{5}$ |
| 52 | $4\sqrt{3}$ |
| 53 | $19\sqrt[3]{X^2} -3X$ |
| 54 | $(5a^2-3b^2)\sqrt{a+b}$ |
| 55 | $4y\sqrt{3}-2y\sqrt{6}$ |
| 56 | $(3X-2)\sqrt[3]{X^2}$ |
| 57 | $1$ |
| 58 | $-12$ |
| 59 | $t-2X\sqrt{t}+X^2$ |
| 60 | $\left(\frac{a+1}{a}\right)^2$ |
| 61 | $10\sqrt{7}$ |
| 62 | $2a^2b+5a\sqrt{by}-3y$ |
| 63 | $X$ |
| 64 | $h$ |

| | |
|---|---|
| 65 | 11.10 sec , 8.88 sec |
| 66 | 91.92 ft |
| 67 | $\frac{3(3-\sqrt{5})}{2}$ |
| 68 | $\sqrt{3}+1$ |
| 69 | $\frac{2}{3}\sqrt[3]{6}$ |
| 70 | $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ |
| 71 | $\frac{8X-20\sqrt{Xy}-6X\sqrt{y}+15y\sqrt{X}}{4X-25y}$ |
| 72 | $\frac{15+10\sqrt{Xy}+6X\sqrt{y}+4y\sqrt{X}}{9X-4y}$ |
| 73 | $\frac{2-5a}{6(\sqrt{2}-\sqrt{5}a)}$ |
| 74 | $\frac{3-5y}{4(\sqrt{3}+\sqrt{5y})}$ |
| 75 | $\frac{X}{X-2\sqrt{X+1}+2}$ |
| 76 | $\frac{X}{X+8+4\sqrt{X+4}}$ |
| 77 | $\frac{a}{3(\sqrt{a+3}+\sqrt{3})}$ |
| 78 | $\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ |
| 79 | $10.124X^2y$ |
| 80 | $0.1251y^2Z$ |
| 81 | $\frac{0.5933a\sqrt{b}}{b}$ |
| 82 | $\frac{0.1974b\sqrt{a}}{a}$ |
| 83 | $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ |
| 84 | $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ |
| 85 | $\sqrt{2}\ S$ |
| 86 | $\sqrt{2}\ S$ |
| 87 | $X=8$ |
| 88 | $50\ ft^2$ |
| 89 | $\frac{(2+X^2)(\sqrt{1+X^2})}{1+X^2}$ |
| 90 | $((2-3X^2)\sqrt{1-X^2})/(2(1-X^2))$ |
| 91 | 7 - - |
| 92 | $5+2\sqrt{6}$ |

## 1 . 9 (118)

| | |
|---|---|
| 1 | $\sqrt[4]{X^3}$ |
| 2 | $\sqrt[5]{y^2}$ |
| 3 | 8 |
| 4 | 128 |
| 5 | $\frac{1}{5}$ |

| | |
|---|---|
| 6 | $\frac{1}{16}$ |
| 7 | $\frac{a\sqrt[4]{ab}}{b}$ |
| 8 | $\sqrt[5]{X^2\ y^{-1}}$ |
| 9 | $(20)^{\frac{2}{3}}$ |
| 10 | $(17)^{3/5}$ |
| 11 | $(13)^{5/4}$ |
| 12 | $(12)^{4/5}$ |
| 13 | $(11)^{1/6}$ |
| 14 | $(7)^{1/12}$ |
| 15 | $(5)^{5/6}$ |
| 16 | $(2)^{5/6}$ |
| 17 | $4$ |
| 18 | $\frac{1}{16}$ |
| 19 | $2Y^2$ |
| 20 | $2C^2d^3$ |
| 21 | $(a^2+b^2)^{1/3}$ |
| 22 | $(a^3-b^3)^{1/4}$ |
| 23 | $3ab^3$ |
| 24 | $3X^2y^2$ |
| 25 | $\frac{m^2n^4}{2}$ |
| 26 | $\frac{m^2n^3}{2}$ |
| 27 | $8a^2$ |
| 28 | $24a\sqrt{a}$ |
| 29 | $\frac{3}{X^3b^2}$ |
| 30 | $\frac{2\sqrt[3]{X^2}}{Xy}$ |
| 31 | $X\sqrt[3]{y}$ |
| 32 | $\sqrt[4]{ab}$ |
| 33 | $\sqrt[6]{288}$ |
| 34 | $2\sqrt[4]{2}$ |
| 35 | $\sqrt[12]{X^{11}\ y^7}$ |
| 36 | $b\sqrt[6]{a^5b}$ |
| 37 | $a\sqrt[6]{a^5}$ |
| 38 | $a\sqrt[6]{a^5}$ |
| 39 | $(a+X)\sqrt[12]{(a+X)^{11}}$ |

| | |
|---|---|
| $\frac{\sqrt[3]{X+y}}{X+y}$ | 40 |
| 24.685 | 41 |
| 8.372 | 42 |
| 43.138 | 43 |
| 2.098 | 44 |
| 32.942 | 45 |
| 11.671 | 46 |
| 5.563ft | 47 |
| 1.46ft | 48 |
| 7.066ft | 49 |
| 17.74ft | 50 |
| $a^{\frac{a}{2}}$ | 51 |
| $(48)(2)^{1/3} \cdot (a)^{34/3} \cdot (b)^{47/9} \cdot (C)^{34/35}$ | 52 |
| $T_1 = 8.2$ hr $\quad T_2 = 6.2$ hr | 53 |

(١٤٤) 2.1

| | |
|---|---|
| X=12 | 1 |
| 24 | 2 |
| X=-6 | 3 |
| (14) | 4 |
| y=8 | 5 |
| $\frac{18}{5}$ | 6 |
| $X=\frac{4}{5}$ | 7 |
| (-8) | 8 |
| X= 2 | 9 |
| -3 | 10 |
| $\frac{-3}{2}$ | 11 |
| $\frac{-27}{24}$ | 12 |
| X=-2 | 13 |
| $\infty$ | 14 |
| $(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$ | 15 |
| $(\frac{2}{5}, -\frac{3}{2})$ | 16 |
| (0,1, -2) | 17 |
| (0,-2,3) | 18 |
| $(\frac{2}{3}, -1)$ | 19 |
| $(\frac{3}{5}, 1)$ | 20 |
| (4,1) | 21 |
| (8, 3) | 22 |
| (-2, -1) | 23 |

| | |
|---|---|
| 24 | (5, 10) |
| 25 | $( -\frac{5}{3} , 4 , \frac{5}{2} )$ |
| 26 | $( \frac{-11}{8} , \frac{-1}{4} . \frac{2}{3} )$ |
| 27 | $0, -\frac{1}{4} , \frac{1}{4} )$ |
| 28 | $0, \frac{1}{3} , -\frac{1}{3} )$ |
| 29 | (0,3) |
| 30 | (0,-2) |
| 31 | $(0, \frac{-1}{3} , 2)$ |
| 32 | $(, 1, \frac{2}{3}, ٥ , )$ |
| 33 | $( \frac{3}{2} , \frac{-2}{3} , 1 )$ |
| 34 | $(4, -3 - \frac{1}{2} )$ |
| 35 | $( \frac{1}{2}, 0 , -3 )$ |
| 36 | (3 , - 3, 6 ,- 6) |
| 37 | $( X / X > -3 )$ |
| 38 | $(X / X > -\frac{4}{5} )$ |
| 39 | $(X/X \geqslant -\frac{5}{12} )$ |
| 40 | $Y/Y \leqslant -\frac{1}{12}$ |
| 41 | $(Y/Y \geqslant \frac{22}{13} )$ |
| 42 | $(X/X < 5 )$ |
| 43 | $(X/X \leqslant \frac{15}{34} )$ |
| 44 | $(X/X \geqslant -\frac{3}{14} )$ |
| 45 | $(X/X<1)$ |
| 46 | $(X/X>-1)$ |
| 47 | $(X/X> 2.5)$ |
| 48 | $(Y/Y< -7)$ |
| 49 | $(t/t^2=5)$ |
| 50 | $(m/ m^3+3=m^2-2)$ |
| 51 | $(X/X>3)$ |
| 52 | $(X/X>-\frac{5}{2})$ |
| 53 | $(X/X< \frac{3}{4} )$ |
| 54 | X \| X عدد حقیقی است |
| 55 | (0.7892) |
| 56 | (-1.305, 1.989) |
| 57 | (0, 2.1522 ) |
| 58 | (0,-1.9492 ) |
| 59 | $(X/X < -0.7848 )$ |

| | |
|---|---|
| 60 | $(y/y> -2.2353)$ |
| 61 | $(-1, 1, \frac{-1}{7})$ |
| 62 | $(2, -2, \frac{-1}{3})$ |
| 63 | $(-1, 1, -2)$ |
| 64 | $(-1, 5, -5)$ |
| 65 | $\{5\}$ |

2 .2 (۱۴۳)

| | |
|---|---|
| 1 | $\frac{7}{3}$ |
| 2 | نخیر |
| 3 | $(-3, 3)$ |
| 4 | بلی |
| 5 | معادله ها معادل نیست |
| 6 | نخیر |
| 7 | $(\frac{20}{9})$ |
| 8 | $(-2)$ |
| 9 | $(\infty)$ |
| 10 | $(\infty)$ |
| 11 | 286 |
| 12 | -1 |
| 13 | $(3,2)$ |
| 14 | $(4,-3)$ |
| 15 | -2 |
| 16 | 2 |
| 17 | $X=6$ |
| 18 | $\frac{11}{30}$ |
| 19 | $\infty$ , |
| 20 | $\infty$ , |
| 21 | $\infty$ , |
| 22 | $\infty$ , |
| 23 | $(8, -5)$ |
| 24 | $(5, -3)$ |
| 25 | $(\frac{5}{3})$ |
| 26 | $(1)$ |
| 27 | $y=0.94656$ |
| 28 | 0.0855 |
| 29 | $(X/X \neq 3)$ |
| 30 | $X/X \neq 2/$ |
| 31 | $(X/X \neq -2)$ |
| 32 | $(X/X \neq 2)$ |
| 33 | $\frac{3}{2}$ |

| | |
|---|---|
| $V_1 = \frac{H+msv_2}{ms}$ | 7 |
| $V_1 = \frac{H}{ms} = V_2$ | 8 |
| $P = \frac{Fm}{m-F}$ | 9 |
| $F = \frac{m\,p}{p+m}$ | 10 |
| $X = \frac{5+ab}{a-b}$ | 11 |
| $X = \frac{C^2}{2c} \pm \frac{C}{2}$ | 12 |
| $X = \frac{-a}{9}$ | 13 |
| $X = a - 7b$ | 14 |
| 44% | 15 |
| 8000 | 16 |
| 6% | 17 |
| 3. 171 | 18 |
| $14,500 , | 19 |
| $21,000 | 20 |
| $23,520<br>$650 | 21 |
| $850 | 22 |
| A=26°, B=130° C=24° | 23 |
| 40° ,80° ,60° | 24 |
| L=93m W=68m | 25 |

| | |
|---|---|
| 3 ✗ 2 , 2 ⟷ 1<br>4 ⟷ 3 | 34 |
| مطابقت است | 35 |
| مطابقت است | 36 |
| مطابقت است | 37 |
| مطابقت است | 38 |
| مطابقت نیست | 39 |
| مطابقت نیست | 40 |
| (ع14) 2 . 3 | |
| $W = \frac{p-2l}{2}$ | 1 |
| $a = \frac{F}{m}$ | 2 |
| $E = IR$<br>$\frac{E}{R} = I$ | 3 |
| $m_2 = \frac{Fd^2}{Km_1}$ | 4 |
| $T_1 = \frac{T_2P_1V_1}{P_2V_2}$ | 5 |
| $V_2' = \frac{T_2P_1V_1}{T_1P_2}$ | 6 |

## ب: عدد نویسی باصول ساینسی

جهت مشرح ساختن بهتر عدد بسیار کلان ، ویا عدد بسیار خورد ( عدد نویسی به اصول ساینسی ) ، اهمیت مشخص دارد. و همچنان در موضوع مطالعه ( مفهوم لوگارتم ) ارزش زیاد دارد .

هر عددیکه ضریب آن 10 یا $10^n$ باشد ، بنام عدد نویسی ساینسی نام گذاری میشود مانند : $5.64 \times 10^{-8}$ و $7.8 \times 10^{13}$ , $a \times 10^{b}$

در عدد نویسی قاعده اینست ، که عدد را با ( 1 ) ...... یا $10^K/10^K$ ضرب مینمائیم . و عدد مطلوب باید یك رقم عدد صحیح داشته باشد . این مفهوم در مثالهای 17 و 18 واضح شده است .

مثال ۱۷: 96,000 را به اصول ساینسی تبدیل کنید :

$$96,000 = 96,000 \times 10^4 / 10^4 \qquad (K = 4)$$

$$= 96,000 / 10^{-4} \times 10^4 = 96,000 ( 1/1 )$$

$$= 9.6 \times 10^4$$

مثال ۱۸: 0.00000478 را به اصول ساینسی تبدیل کنید :

$$0.00000478 = 0.00000478 \times 10^6 / 10^6$$

$$= ( 0.00000478 \times 10^6 ) \times 10^{-6} = 4.78 \times 10^{-6}$$

مثالهای دیگر : به اصول عشاری تبدیل نمائید :

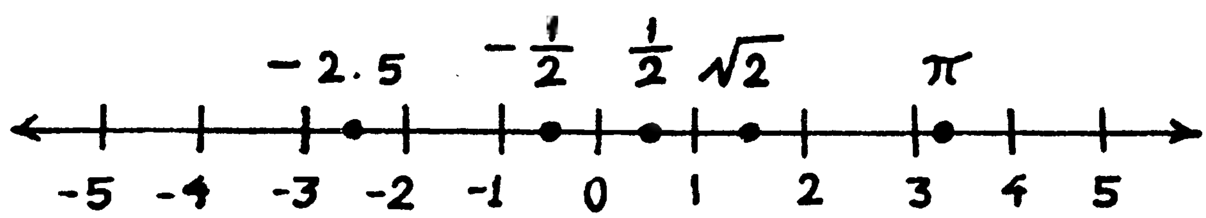
19. $6.043 \times 10^5 = 604,300$

20. $4.7 \times 10^{-8} = 0.000000047$

۱ـ۱ سیستم اعدادحقیقی :

اعداد اقسام مختلف دارند، وعموماً اعدادیکه در الجبر ابتدائی بکار میروند بنام اعدادحقیقی ( Real numbers ) یاد میشوند.

در دروس آینده ، سیستم اعدادی را که مغلق و پیچیده میباشند و بنام اعداد کمپلکس (اعداد موهومی) یاد میشوند، مطالعه خواهیم نمود. اعدادحقیقی ، عموماً به اساس ارتباط «یك ـ به ـ یك» نظر به نقاط در یك خط نشان داده میشوند مانند: شکل ذیل :




اعداد حقیقی مثبت بطرف راست صفر ، و اعداد منفی بطرف چپ صفر نشان داده شده اند. صفر بذات خود نه منفی و نه مثبت است .

سیستم اعدادحقیقی به چندین دسته تقسیم گردیده که قرار ذیل ارایه میشود:

۱ـ اعداد طبیعی : آن اعداداند که برای حساب کردن بکار میروند مانند :

( 1,2,3,4,5 ........ )

۲ـ اعداد مکمل : اعدادطبیعی و عدد صفر: ( 0,1,2,3 ........ )

۳ـ اعداد تام : اعداد مکمل و اعدادمخالف العلامهء آن ها مانند :

( 1,2,3 . ,1 − ,2 − ,3 − .................. )

٤ـ اعداد ناطق ( ریشنل ) : اعداد تام ، و خارج قسمت تمام اعداد تام ( بدون تقسیم به عدد صفر ) مانند :

{ −2/3 , 78/−5 , 0 , − 4 , 6 , 9/1 , −4/7 , 4/5 }

| | |
|---|---|
| 13m ,6.5m | 26 |
| X=91% | 27 |
| 83% | 28 |
| X= 2cm | 29 |
| 8cm | 30 |
| 810,000 | 31 |
| 720,000 | 32 |
| 12Km/h | 33 |
| 4Km/h | 34 |
| A=46mph | 35 |
| B=58mph | |
| 80mph,66 mph | 36 |
| d= 98.3miles | 37 |
| 450km | 38 |
| $1\frac{34}{71}$ hr | 39 |
| $2\frac{4}{13}$ hr | 40 |
| t= 6.21hr. | 41 |
| A=23.95hr | 42 |
| B=51.02 hr | |
| $1147.40 | 43 |
| a,$2055.46 | 44 |
| b,$2109.47 | |
| c,$2139.05 | |
| d,$2170.28 | |
| e,$2170.58 | |
| 32 mph | 45 |
| 35mp | 46 |
| 53.26mph | 47 |
| 48km/h | 48 |
| $51\frac{3}{7}$ mph | 49 |
| $4:21\frac{9}{11}$ | 50 |
| $8\frac{2}{11}$ | 51 |
| $10:38\frac{2}{11}$ | |
| $\frac{2}{3}$ hr | 52 |

2. 4 (١٨٣)

| | |
|---|---|
| $i\sqrt{15}$ | 1 |
| $i\sqrt{17}$ | 2 |
| 9i | 3 |
| 5i | 4 |
| $-2i\sqrt{3}$ | 5 |
| $-2i\sqrt{5}$ | 6 |
| 9i | 7 |

| | |
|---|---|
| 8 | $4i$ |
| 9 | $(\sqrt{7}-\sqrt{10})i$ |
| 10 | $(\sqrt{5}+\sqrt{7})i$ |
| 11 | $-\sqrt{55}$ |
| 12 | $-2\sqrt{14}$ |
| 13 | $2\sqrt{5}$ |
| 14 | $3\sqrt{7}$ |
| 15 | $\sqrt{\frac{5}{2}}\ i$ |
| 16 | $-\sqrt{\frac{7}{5}}\ i$ |
| 17 | $(-\frac{3}{2})i$ |
| 18 | $(\frac{5}{4})i$ |
| 19 | $-2$ |
| 20 | $-\frac{5}{4}$ |
| 21 | $6+5i$ |
| 22 | $11+i$ |
| 23 | $8$ |
| 24 | $0$ |
| 25 | $2+4i$ |
| 26 | $5-7i$ |
| 27 | $-4-i$ |
| 28 | $-5+i$ |
| 29 | $-5+5i$ |

| | |
|---|---|
| 30 | $13+i$ |
| 31 | $7-i$ |
| 32 | $13$ |
| 33 | $-6+12i$ |
| 34 | $20+15i$ |
| 35 | $-5+12i$ |
| 36 | $5-12i$ |
| 37 | |
| 38 | $1$ |
| 39 | $4X^2+25y^2$ |
| 40 | $(4a+7bi)(4a-7bi)$ |
| 41 | $1+2i$ |
| 42 | لا |
| 43 | $X=-\frac{3}{2}$, $Y=7$ |
| 44 | $X=3,\ y=2$ |
| 45 | $\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$ |
| 46 | $\frac{22}{41}-\frac{7}{41}i$ |
| 47 | $\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$ |
| 43 | $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ |

| | |
|---|---|
| 49 | $2-3i$ |
| 50 | $3-2i$ |
| 51 | $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ |
| 52 | $\frac{15}{146}+\frac{33}{146}i$ |
| 53 | $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ |
| 54 | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ |
| 55 | $\frac{28}{65}-\frac{29}{65}i$ |
| 56 | $\frac{719}{3233}+\frac{955}{3233}i$ |
| 57 | $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ |
| 58 | $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ |
| 59 | $\frac{5}{2}+\frac{13}{2}i$ |
| 60 | $-\frac{1}{2}-\frac{13}{2}i$ |
| 61 | $\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$ |
| 62 | $\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$ |
| 63 | $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ |
| 64 | $\frac{2}{29}-\frac{5}{29}i$ |
| 65 | $-i$ |
| 66 | $i$ |
| 67 | $\frac{i}{4}$ |
| 68 | $-\frac{i}{5}$ |
| 69 | $X=\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$ |
| 70 | $\frac{12}{5}-\frac{1}{5}i$ |
| 71 | $\frac{8}{5}-\frac{9}{5}i$ |
| 72 | $\frac{8}{29}+\frac{9}{29}i$ |
| 73 | $X=2-i$ |
| 74 | $-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$ |
| 75 | $\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$ |
| 76 | $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ |
| 77 | $1$ |
| 78 | $-2i$ |
| 79 | $Z \times \bar{Z}$ حقیقی است |

| | |
|---|---|
| 80 | حقیقی است Z+Z |
| 81 | $\overline{Z+W} = \bar{Z} + \bar{W}$ |
| 82 | $\overline{ZXW} = \bar{Z} \times \bar{W}$ |
| 83 | $\overline{Z^n} = \bar{Z}^n$ |
| 84 | $\bar{\bar{Z}} = Z$ |
| 85 | $3\bar{Z}^{-5} - 4\bar{Z}^2 + 3\bar{Z} - 5$ |
| 86 | 1 |
| 87 | $Z = 7 + \frac{8}{9} i$ |
| 88 | a |
| 89 | b |

(۳۰۳) 2.5

| | |
|---|---|
| 1 | $\pm\sqrt{5}$ |
| 2 | $\pm\sqrt{7}$ |
| 3 | 0 |
| 4 | 0 |
| 5 | $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ |
| 6 | $\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$ |
| 7 | $\pm i\sqrt{7}$ |
| 8 | $\pm i\sqrt{5}$ |
| 9 | $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ |
| 10 | $\pm\sqrt{\frac{k}{4}}$ |
| 11 | $(7 \pm \sqrt{5})$ |
| 12 | $(-3 \pm \sqrt{2})$ |
| 13 | $\pm\frac{3}{2}$ |
| 14 | $\pm\frac{5}{4}$ |
| 15 | $h \pm \sqrt{a}$ |
| 16 | $h \pm \sqrt{\frac{y-k}{a}}$ |
| 17 | $-3 \pm \sqrt{5}$ |
| 18 | $(3 \pm \sqrt{13})$ |
| 19 | $(3, -10)$ |
| 20 | $(-3, 10)$ |
| 21 | $(\frac{2 \pm \sqrt{14}}{5})$ |
| 22 | $(\frac{7 \pm \sqrt{13}}{12})$ |
| 23 | $(\frac{3}{2}, -5)$ |
| 24 | $\frac{5}{3}$ |

25 $(1, -5)$

26 $(-3, 5)$

27 $(2, -\frac{1}{2})$

28 $(-1, \frac{2}{5})$

29 $\frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$

30 $3 \pm \sqrt{7}$

31 $6 \pm \sqrt{33}$

32 $(-2, -4)$

33 $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

34 $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

35 $2 \pm 3i$

36 $\frac{-1 \pm 2i}{5}$

37 یک حقیقی است

38 یک حقیقی است

39 حقیقی نیست

40 هر دو حقیقی است

41 هر دو حقیقی است

42 هر دو حقیقی است

43 یک حل حقیقی دارد

44 دو حل حقیقی دارد

45 دوحل دارد غیر حقیقی

46 〃 〃 〃

47 دو حل دارد حقیقی

48 دوحل دارد حقیقی

49 دوحل دارد حقیقی

50 دوحل حقیقی دارد

51 حل حقیقی دارد (یک)

52 دو حل حقیقی دارد

53 $X^2 + 2X - 99 = 0$

54 $X^2 - 16 = 0$

55 $X^2 - 14x + 49 = 0$

56 $9X^2 + 12X + 4 = 0$

57 $25X^2 - 20X - 12 = 0$

58 $8X^2 + 6X + 1 = 0$

59 $4X^2 - 2(c+d)X + cd = 0$

60 $12X^2 - (4k + 3m)X + km = 0$

61 $X^2 - 4\sqrt{2}X + 6 = 0$

62 $X^2 - \sqrt{3}X - 6 = 0$

63 $X^2 + 9 = 0$

64 $X^2 + 16 = 0$

65 $(1.1754, -0.4254)$

| | |
|---|---|
| 66 | (1.8693, −0.3252) |
| 67 | $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ |
| 68 | $\left(6, \frac{3}{2}\right)$ |
| 69 | $(-0.1 \pm \sqrt{0.31})$ |
| 70 | $\left(\frac{-0.3 \pm \sqrt{0.89}}{2}\right)$ |
| 71 | $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}\right.$ |
| 72 | $\frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$ |
| 73 | $\left(\frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{5+4\sqrt{3}}}{2}\right)$ |
| 74 | $\frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3+8\pi}}{4}$ |
| 75 | $\left(\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{6+8\sqrt{10}}}{4}\right)$ |
| 76 | $\left(\frac{-5\sqrt{2} \pm \sqrt{34}}{4}\right)$ |
| 77 | $\left(\frac{3}{4}, -2\right)$ |
| 78 | (2, −3) |
| 79 | $\left(\frac{1 \pm \sqrt{113}}{2}\right)$ |
| 80 | (−4, 3) |
| 81 | $(3 \pm \sqrt{5})$ |
| 82 | (−12, 4) |

| | |
|---|---|
| (ر10) | 2, 6 |

| | |
|---|---|
| 1 | $d = \sqrt{\frac{KM_1M_2}{f}}$ |
| 2 | $C = \sqrt{\frac{E}{m}}$ |
| 3 | $t = \sqrt{\frac{25}{a}}$ |
| 4 | $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{\pi}}$ |
| 5 | $\frac{V_o \pm \sqrt{V_o^2 - 64S}}{-32}$ |
| 6 | $r = \frac{-3\pi h + \sqrt{9\pi^2 h^2 + 8A\pi}}{4\pi}$ |
| 7 | a = 1 , b = −3 C = −2d <br> $n = (3+\sqrt{9+8d})(\frac{1}{2})$ |
| 8 | $t = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 12k\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$ |
| 9 | $-1 + \sqrt{\frac{a}{p}} = i$ |
| 10 | $i = 2\left(-1+\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$ |
| 11 | 18.75% |
| 12 | 10% |
| 13 | 11% |

| | |
|---|---|
| 14 | 12.75% |
| 15 | n= 9 |
| 16 | 11 |
| 17 | 2ft |
| 18 | 7 ft |
| 19 | h = 4.685cm |
| 20 | 127.28ft |
| 21 | A =15mph<br>B =20mph |
| 22 | A = 24km/h |
| 23 | B =10km/h |
| 24 | a, t= 3.91 sec.<br>b, t = 1.906 sec.<br>c, s= 79.6 m |
| 24 | a, 10.1 sec.<br>b, 7.49 sec.<br>c, 272,5m |
| 25 | S=3.237cm |
| 26 | 2.2199cm , 8.0101cm |
| 27 | X=7 |
| 28 | 12 |
| 29 | X = 12 |
| 30 | $8 |
| 31 | $(2, -\frac{3}{k})$ |
| 32 | $(1, \frac{1}{1-k})$ |
| 33 | $(\frac{1}{m+n} - \frac{2}{m+n})$ |
| 34 | $(-X, \frac{X}{4})$ , $(4X - y)$ |
| 35 | $i = 11.7\%$ |
| 36 | $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ |
| 37 | $a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ |
| 38 | $300ft^2$ |

(۲۲۵) 2 , 7

| | |
|---|---|
| 1 | $\frac{5}{3}$ |
| 2 | - 63 |
| 3 | $X= \pm\sqrt{2}$ |
| 4 | 168 |
| 5 | حل ندارد |
| 6 | حل ندارد |
| 7 | X= 4 |
| 8 | 9 |
| 9 | جل ندارد |
| 10 | 2 |
| 11 | X = - 6 |

| | |
|---|---|
| 12 | $\frac{28}{3}$ |
| 13 | X= 3 , X = -1 |
| 14 | $\frac{1}{3}$ , - 1 |
| 15 | $X = \frac{80}{9}$ |
| 16 | -1 |
| 17 | X = 62. 4459 |
| 18 | 0.1444 |
| 19 | X= -8 |
| 20 | 32 |
| 21 | t=81 |
| 22 | حل ندارد |
| 23 | $X=\frac{1}{64}$ |
| 24 | $\frac{1}{9}$ |
| 25 | m= -125 |
| 26 | حل ندارد |
| 27 | $g = \frac{4\pi^2 L}{t^2}$, $L = \frac{gt^2}{4\pi^2}$ |
| 28 | $C= \sqrt{h^2-d^2}$ |
| 29 | V= 207.8 |
| 30 | 10mi |
| 31 | h= 14,400ft |
| 32 | 84ft |
| 33 | $X= 5\pm 2\sqrt{2}$ |
| 34 | $3\pm 2\sqrt{2}$ |
| 35 | $X= \frac{-8}{9}$ |
| 36 | حل ندارد. |
| 37 | X= 2 |
| 38 | 1 |
| 39 | $\frac{-5+\sqrt{61}}{18}$ |
| 40 | $\frac{5}{4}$ |

(٢٣٦) 2 . 8

| | |
|---|---|
| 1 | X= 81, X= 1 |
| 2 | 16, $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $X= \pm\sqrt{5}$ |
| 4 | 1, - 1, $\pm\sqrt{2}$ |
| 5 | (-27 , 8 ) |
| 6 | (64 , -8 ) |
| 7 | Z = 16 |
| 8 | 729 |
| 9 | ( 7, -1 , 5 , 1 ) |

27 — $1\pm\sqrt{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

28 — $(0, \frac{56}{5})$

29 — = 132,66ft *high*

30 — 229.94ft

31 — X= 2.0485

32 — ( ±1.9863,±0.8966i )

33 — (4 , 1 )

34 — $\frac{-3}{2}$ , -1

35 — X= 19 (35) 9 ← 36

---

(٢٥٠) 2 . 9

---

1 — $y = \frac{3}{2}X$

2 — $y = \frac{0.32}{X}$

3 — $Y = \frac{0.0015}{X^2}$

4 — Y= 0. 8XZ

5 — $y = \frac{XZ}{w}$

6 — $Y = 0.3XZ^2$

7 — $y = \frac{5}{4} \cdot \frac{XZ}{w^2}$

8 — $Y = \frac{1}{5} \cdot \frac{XZ}{wp}$

9 — Y= 2kX

10 — 1

11 — $(4, 1, \frac{5\pm\sqrt{37}}{2})$

12 — 1, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{-3}{2}$

13 — $w = \pm\sqrt{2+\sqrt{6}}$

14 — $\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

15 — $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$

16 — $(-1, \frac{4}{5})$

17 — ( 2, -1)

18 — $(-\frac{1}{10}, 1)$

19 — ± 5 ,±i

20 — ± 3 ,± 2i

21 — $\frac{9\pm\sqrt{89}}{2}$, $-1\pm\sqrt{3}$

22 — $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

23 — $X = \frac{100}{99}$

24 — حل ندارد

25 — $X = \frac{-6}{7}$

26 — $(\frac{5}{2}, -5)$

| (٢٩١) 2 . 10 | |
|---|---|
| 12 yd | 1 |
| 96 OZ | 2 |
| 48hr | 3 |
| 27km | 4 |
| 3g. | 5 |
| 18km | 6 |
| 8m | 7 |
| 16 tons | 8 |
| $12ft^3$ | 9 |
| $27yd^3$ | 10 |
| $\frac{7}{10} \frac{kg^2}{m^2}$ | 11 |
| 180 | 12 |
| $720 \frac{lb - m^2}{hr^2 - ft}$ | 13 |
| $14 (\frac{m-kg}{sec^2})$ | 14 |
| $\frac{15}{2} \frac{cm^5 - kg}{Sec^3}$ | 15 |
| 125ft -lb | 16 |
| 6ft | 17 |
| 1020min | 18 |

| | |
|---|---|
| $(Y) \propto \frac{1}{3}$ | 10 |
| $Y = \frac{k}{X^2}$ , y) $(\frac{1}{n^2})$ | 11 |
| $(Y) \propto n^2$ | 12 |
| $A_2$ = 532,500 tons | 13 |
| $220 \ in^3$ | 14 |
| $L = 16 \cdot \frac{KWh^2}{\ell}$ | 15 |
| 256 | 16 |
| $h_2$ = 68.6m | 17 |
| 1.263 ohms | 18 |
| $A_2 = 624.24m^2$ | 19 |
| $22.5 \frac{W}{m^2}$ | 20 |
| K = 97 | 21 |
| $220cm^3$ | 22 |
| $q = \frac{1}{k}p$ | 23 |
| $\frac{1}{u} = \frac{1}{k} \cdot V$ | 24 |
| $k = \frac{\pi}{4}$ | 25 |
| $t \approx \sqrt{P}$ | 26 |

## تمرین

به یاداشت ساینسی تبدیل نمایید:

34. 465,000

35. 3789

---

به یاداشت ساینسی تبدیل نمایید :

36. 0.000145

37. 0.00000000067

---

به یاداشت عشاری تبدیل کنید :

38. $4.67 \times 10^{-5}$

39. $7.894 \times 10^{12}$

---

## ج : مشخصات قیمت مطلقه

مادرین بحث ، مشخصات قیمت مطلقه را تحت مداقه قرار میدهیم و با استفاده از آن، افاده های الجبری را که معادل آن است ساده میسازیم .

مثال :

21. $|-3 \times 5| = |-15| = 15$

$|-3| \times |5| = 3 \times 5 = 15$

$|-3 \times 5| = |-3| \times |5|$

22. $|-4 \times (-3)| = |12| = 12$

$|-4| \times |-3| = 4 \times 3 = 12$

$|-4(-3)| = |-4| \times |-3|$

مشاهده میشود که حاصل ضرب قیمت های مطلقه خود ، عدد مطلقه میشود.

همچنان قیمت مطلقه یك خارج قسمت عبارت است ازخارج قسمت قیمتهای مطلقه آن .

172,800 Sec 19

0,1 hr 20

600 $\frac{g}{cm}$ 21

30 $\frac{mil}{hr}$ 22

2, 160,000$cm^2$ 23

0.81 $\frac{ton}{yd^3}$ 24

150 $\frac{g}{hr}$ 25

60man - days 26

6. 228 $\frac{L}{hr}$ 27

180 $\frac{cg}{mL}$ 28

5, 865, 696, 000, 000 mi/yr 29

6,570, 000 $\frac{mi}{yr}$ 30

1621.8m/min -:31

774,5 $m^3$ 32

1638.4 $km^2$ 33

208.13 $\frac{lb}{ft}$ 34

L= 5m = 500cm 35

W= 1250gr

1.72cm, 0.08cm 36

50moles = 1600 gr. oxygen 37

888.8gr 38

303gr 15moles of Neon 39

11.8moles 40

4.4937x $10^{20}$ $\frac{gm^2}{sec^2}$ 41

15.48g 42

## فصل اول

### جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۳) الی (۱۸):

(1-1)

**1.** 1, 19 **2.** 0, 1, 19 **3.** $-6, 0, 1, 19$ **4.** تمام ،
**5.** ناطق **6.** ناطق **7.** ناطق **8.** ناطق
**9.** غیرناطق **10.** غیرناطق **11.** 2 **12.** $\sqrt{3}$ **13.** 11.3
**14.** $\frac{3}{4}$ **15.** $-12$ **16.** $-4.7$ **17.** $-\frac{4}{5}$ **18.** $-0.2$ **19.** 5
**20.** 0 **21.** $-6, -6$ **22.** 8, 8 **23.** 3.4, 3.4 **24.** $2, -4$
**25.** $-24$ **26.** $\frac{21}{25}$ **27.** 144 **28.** 1.3 **29.** 17 **30.** $-\frac{11}{5}$
**31.** $-13$ **32.** 4 **33.** $-3$ **34.** $-\frac{8}{3}$ **35.** 2

### جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۲۴) الی (۳۲)

(1-2)

**1.** $8^4$ **2.** $x^3$ **3.** $(4y)^4$ **4.** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, or 81
**5.** $5x \cdot 5x \cdot 5x \cdot 5x$, or $625x^4$

**6.** $(-5)(-5)(-5)(-5)$, or 625
**7.** $-[5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5]$, or $-625$ **8.** 1 **9.** $25y^2$ **10.** $-8x^3$

**11.** $4^{-3}$ **12.** $\frac{1}{10^4}$, or $\frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}$, or $\frac{1}{10{,}000}$

**13.** $\frac{1}{4^3}, \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4}, \frac{1}{64}$ **14.** $8^4$ **15.** $y^5$ **16.** $-18x^{11}$

**17.** $-75x^{-14}$ **18.** $-10x^{-12}y^2$ **19.** $60y$ **20.** $4^3$ **21.** $5^6$
**22.** $10^{-14}$ **23.** $9^{-6}$ **24.** $y^{11}$ **25.** $5y^{-1}$ **26.** $-2x^{-3}y^9$
**27.** $3^{49}$ **28.** $8^{-14}$ **29.** $y^{-28}$ **30.** $8x^3y^3$ **31.** $16x^{-4}y^{14}$
**32.** $\frac{1}{27}x^{-12}y^{-6}$ **33.** $1000x^{-12}y^{21}z^{-6}$ **34.** $4.65 \times 10^5$
**35.** $3.789 \times 10^3$ **36.** $1.45 \times 10^{-4}$ **37.** $6.7 \times 10^{-10}$
**38.** 0.0000467 **39.** 7,894,000,000,000 **40.** $6|a||b|$

**41.** $x^8$ **42.** $10m^2n^2|n|$ **43.** $\frac{2x^2|x|}{y^2}$

### جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۳۹) الی (۴۲)

(1-3)

**1.** 8, 6, 4, 9, 0; 9 **2.** 4, 4, 5, 6, 0; 6 **3.** $9x^3y^2 - 2x^2y^3$
**4.** $7xy^2 - 2x^2y$ **5.** $3x^4\sqrt{y} + 2$ **6.** $-4x^3 + 2x^2 - 4x - \frac{3}{2}$
**7.** $5p^2q^4 + p^2q^2 - 6pq^2 - 3q + 5$
**8.** $-(5x^2t^2 - 4xy^2t - 3xt + 6x - 5)$,
$-5x^2t^2 + 4xy^2t + 3xt - 6x + 5$
**9.** $-(-3x^2y + 5xy - 7x + 4y + 2)$, $3x^2y - 5xy + 7x - 4y - 2$
**10.** $8xy^4 - 9xy^2 + 4x^2 + 2y - 7$
**11.** $7x^2y - 9x^3y^2 + 5x^2y^3 - x^2y^2 + 9y$

## جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۴۵) " (۴۹)

(1-4)

1. $3x^3y^2 + 4x^2y^2 - xy^2 + 6y^2$
2. $2p^4q^2 + 3p^3q^2 + 3p^2q^2 + 2q^2$
3. $2x^3y - 4xy + 3x^3 - 6x$ 4. $15x^2 - xy - 6y^2$
5. $6xy - 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 2$ 6. $16x^2 - 40xy + 25y^2$
7. $4y^4 + 24x^2y^3 + 36x^4y^2$ 8. $16x^2 - 49$ 9. $25x^4y^2 - 4y^2$
10. $16y^4 - 3$ 11. $4x^2 + 12x + 9 - 25y^2$ 12. $25t^2 - 4x^6y^4$
13. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 14. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
15. $t^6 - 9t^4b + 27t^2b^2 - 27b^3$
16. $8a^9 - 60a^6b^2 + 150a^3b^4 - 125b^6$

## جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۵۹) " (۶۷)

(1-5)

1. 1 6 15 20 15 6 1; 1 7 21 35 35 21 7 1; 1 8 28 56 70 56 28 8 1 2. $a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$
3. $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$
4. $128t^7 + 448t^5 + 672t^3 + 560t + 280t^{-1} + 84t^{-3} + 14t^{-5} + t^{-7}$ 5. $x^9 - 9x^8y + 36x^7y^2 - 84x^6y^3 + 126x^5y^4 - 126x^4y^5 + 84x^3y^6 - 36x^2y^7 + 9xy^8 - y^9$
6. 40,320 7. 362,880 8. 126 9. 28 10. 7
11. 1 12. 56 13. 7 14. 9 15. 1
16. $x^5 + 25x^4b + 250x^3b^2 + 1250x^2b^3 + 3125xb^4 + 3125b^5$
17. $x^4 - 4x^3y^2 + 6x^2y^4 - 4xy^6 + y^8$ 18. $181{,}440a^4b^3$
19. $103{,}680x^2$

## جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۷۲) " (۷۶)

(1-6)

1. $4x^2y(5x + 3)$ 2. $(p + q)(2x + y + 2)$
3. $(4x - 3)(x + 5)$ 4. $(x - 4)(x + 4)$
5. $(5y^2 + 4x)(5y^2 - 4x)$ 6. $2(y^2 + 4x^2)(y - 2x)(y + 2x)$
7. $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ 8. $(3y - 5)^2$ 9. $(4x + 9y)^2$
10. $-3y^2(2x^2 - 5y^3)^2$ 11. $(x + 7)(x - 2)$
12. $(3x + 2)(x + 1)$ 13. $3(2x^2y^3 + 5)(x^2y^3 - 4)$
14. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ 15. $(4 - t)(16 + 4t + t^2)$
16. $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$
17. $(2m + 5t)(4m^2 - 10mt + 25t^2)$
18. $2y(4y^2 - 5x^2)(16y^4 + 20x^2y^2 + 25x^4)$

## جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۸۱) " (۸۹)

(1-7)

1. غیر از 3 تمام حقیقی

2. غیر از 4- و 3- تمام حقیقی

3. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{14x^3-7x}$ 4. $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x+4}$

5. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-15}$; غیر از 5; تمام حقیقی ها
غیر از 3- و 5، تمام حقیقی

6. $\dfrac{3x+2}{x+2}$; غیر از 2-; 2- و 0 تمام حقیقی
غیر از 2- حقیقی

7. $\dfrac{y+2}{y-1}$; غیر از 1-; 1- و 1 تمام حقیقی
غیر از 1 تمام حقیقی

8. $\dfrac{3x-3y}{x+y}$ 9. $\dfrac{2a^2b+2ab^2}{a-b}$ 10. $\dfrac{3x^2+4x+2}{x-5}$

11. $\dfrac{2x^2+11}{x-5}$ 12. $\dfrac{4x^2-xy+4y^2}{2(2x-y)(x-y)}$ 13. $\dfrac{x-6}{(x+4)(x+6)}$

14. $\dfrac{1}{a-x}$ 15. $\dfrac{b+a}{b-a}$

## جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۹۹) " (۱۰۸)

(1-8)

1. بلی، نه 2. بلی و نه 3. بلی 4. بلی

5. $|x+2|$ 6. $|x|\cdot|y-2|$ or $|x(y-2)|$ 7. $|x+2|$

8. $|x+4|$ 9. $-4xy$ 10. $\sqrt{133}$ 11. $\sqrt{x^2-4y^2}$

12. $\sqrt[4]{81}$, or 3 13. $10\sqrt{3}$ 14. $6|y|$ 15. $|x+1|\sqrt{2}$

16. $2\cdot\sqrt[3]{2}$ 17. $(a+b)\cdot\sqrt[3]{a+b}$ 18. $\frac{7}{8}$ 19. $\dfrac{5}{|y|}$

20. $\dfrac{\sqrt{35}}{5}$ 21. $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{5}$ 22. 5 23. $\dfrac{|x|}{5}$ 24. $\dfrac{2x}{y}$

25. $3^{10}$ 26. $3^4$ 27. $-6\sqrt{5}$ 28. $(10y+7)\sqrt[3]{2y}$

29. $-4-9\sqrt{6}$ 30. 37.42 mph 31. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-2}$

32. $\dfrac{x-7\sqrt{x}+10}{x-4}$ 33. $\dfrac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a}}$ 34. $\dfrac{x-5}{x+2\sqrt{5x}+5}$

## جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۱۱۶) " (۱۱۸)

(1-9)

1. $\sqrt{n^3}$, or $n\sqrt{n}$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt[7]{y^6}}$ 3. 16 4. $\frac{1}{16}$

5. $(5ab)^{4/3}$ or $(5ab)\sqrt[3]{5ab}$ 6. 8 7. $a^{2/3}$

8. $4^{1/6}$, $(2^2)^{1/6}$ or $2^{1/3}$ 9. $5^{11/6}$ or $5\sqrt[6]{5^5}$ 10. $\sqrt[4]{a^5}$ or $a\sqrt[4]{a}$

11. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^6}}$ or $\dfrac{1}{x\sqrt[5]{x}}$ 12. $\sqrt[4]{2^3} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ or $3\dfrac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$ 13. $\sqrt[6]{200}$

14. $\sqrt[6]{x^4y^3z^5}$ 15. $\sqrt[4]{(x+y)}$

## جوابات خلاصه وتکرار فصل اول ازصفحه (۱۲۲) " (۱۲۵)

تکرار فصل اول

1. 12, −3, −1, −19, 31, 0 2. 12, 31
3. All except $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{10}$ 4. All 5. $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{10}$
6. 0, 12, 31 7. −4 8. −8 9. −5
10. 30 11. −6 12. 153
13. −3000 14. $-\frac{3}{16}$ 15. $\frac{31}{24}$
16. 3,261,000 17. 0.00041
18. $1.432 \times 10^{-2}$ 19. $4.321 \times 10^4$
20. $-14a^{-2}b^7$ 21. $6x^9y^{-6}z^6$ 22. 3
23. −2 24. $\dfrac{b}{a}$ 25. $\dfrac{x+y}{xy}$ 26. −4
27. $25x^4 - 10x^2\sqrt{2} + 2$ 28. [1.8] $13\sqrt{5}$
29. $x^3 + t^3$ 30. [1.4] $125a^3 + 300a^2b + 240ab^2 + 64b^3$
31. $8xy^4 - 9xy^2 + 4x^2 + 2y - 7$ 32. [1.5] $21a^2b^5$
33. $x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$
34. $(x^2 - 3)(x + 2)$
35. $3a(2a - 3b^2)(2a + 3b^2)$
36. $(x + 12)^2$ 37. [1.6] $x(9x - 1)(x + 4)$
38. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
39. $(3x^2 + 5y^2)(9x^4 - 15x^2y^2 + 25y^4)$
40. $y^3 \cdot \sqrt[6]{y}$ 41. $\sqrt[3]{(a+b)^2}$ 42. $\sqrt[6]{b^7}$
43. $\dfrac{m^4n^2}{3}$ 44. 3 45. $\dfrac{x-5}{(x+3)(x+5)}$
46. $\dfrac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x - y}$ 47. Inverses (+)
48. Distributive 49. Associative (×)
50. Commutative (×) 51. [1.4] $x^{2n} + 6x^n - 40$
52. $t^{2a} + 2 + t^{-2a}$ 53. $y^{2b} - z^{2c}$
54. $a^{3n} - 3a^{2n}b^m + 3a^nb^{2m} - b^{3m}$ 55. $(y^n + 8)^2$
56. $(x^t - 7)(x^t + 4)$
57. $m^{3n}(m^n - 1)(m^{2n} + m^n + 1)$
58. $\dfrac{2xn^5}{(n+1)^5}$ 59. $\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$

# فصل دوم

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۱۲۷) " (۱۳۳)

2-1

1. $\{9\}$ 2. $\{0, -1\}$ 3. $\frac{4}{3}$ 4. $\frac{17}{2}$ 5. $-\frac{19}{8}$ 6. $\emptyset$ 7. $\emptyset$
8. $\{7, -\frac{3}{2}\}$ 9. $\{5, -4\}$ 10. $\{0, 5\}$ 11. $\{-\frac{1}{3}\}$
12. $\{0, -\frac{1}{3}, 4\}$ 13. $\{1, -1, -\frac{1}{5}\}$ 14. $\{x | x > \frac{3}{2}\}$
15. $\{y | \frac{22}{13} \leqslant y\}$ 16. $\{x | x < 5\}$ 17. $\{x | x > \frac{5}{2}\}$
18. $\{y | y \geqslant -7\}$ 19. $\{x | x^2 = 5\}$ 20. $\{x | x \geqslant 2\}$
21. $\{x | x \geqslant -3\}$ 22. $\{x | \frac{11}{2} \geqslant x\}$

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۱۳۷) " (۱۴۲)

2-2

1. بلی 2. بلی 3. خیر 4. بلی 5. خیر 6. خیر
7. Add $5x^2$. 8. Add $-5x^2$. 9. $\emptyset$ 10. $\emptyset$ 11. $\{6\}$
12. $\{4\}$ 13. $\{6, -6\}$ 14. $\{\frac{16}{5}\}$

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۱۴۹) " (۱۶۳)

(2-3)

1. $F = \frac{9}{5}C + 32$ 2. $r_2 = \dfrac{Rr_1}{r_1 - R}$ 3. 18% 4. 57 5. 27
6. \$2600 7. \$2565.78 8. \$2637.93
10. 36 km/h 11. 375 km
13. $2\frac{2}{3}$ hr

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۱۹۰) " (۲۰۳)

(2-4)

1. $i\sqrt{6}$ 2. $-i\sqrt{10}$ 3. $2i$ 4. $-5i$ 5. $-\sqrt{10}$
6. $\sqrt{11}$ 7. $i\sqrt{7}$ 8. $7i$ 9. $3i$ 10. $(\sqrt{17} + 3)i$ 11. $i$
12. $-1$ 13. $-i$ 14. $12 + i$ 15. $5 - i$ 16. $2 + 14i$
17. 8 18. $-6 + 8i$ 19. $3i$ 20. $(x + 2i)(x - 2i)$
21. $(3 + yi)(3 - yi)$ 22. بلی 23. $x = -1, y = 2$
24. $7 - 2i$ 25. $6 + 4i$ 26. $5i$ 27. $-3i$ 28. $-3$
29. 8 30. $\frac{9}{13} + \frac{7}{13}i$ 31. $\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$ 32. $\dfrac{1}{3 + 4i}, \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$
33. $2 + 5i$

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۲۱۰) " (۲۳۴)

(2-5) 1. $\pm\sqrt{3}$ 2. 0 3. $\pm\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ 4. $\pm\sqrt{\frac{n}{m}}$ 5. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$
6. $-4\pm\sqrt{7}$ 7. $5\pm\sqrt{3}$ 8. $-3, -7$ 9. $4, (x+2)^2$
10. $9, (x-3)^2$ 11. $\frac{25}{4}, (x+\frac{5}{2})^2$ 12. $\frac{49}{4}, (x-\frac{7}{2})^2$
13. $\frac{9}{64}, (x+\frac{3}{8})^2$ 14. $\frac{1}{4}, (x-\frac{1}{2})^2$ 15. $-2\pm\sqrt{7}$
16. 4, 2 17. 2, 3 18. $\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$ 19. $-1, \frac{1}{4}$
20. $\frac{1}{2}, -4$ 21. $\frac{4\pm\sqrt{31}}{5}$ 22. $\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$ 23. دو حقیقی
24. یک حقیقی 25. دو غیرحقیقی 26. $3x^2+7x-20=0$
27. $x^2+25=0$ 28. $x^2+\sqrt{2}x-4=0$

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (210) " ( )

(2-6) 1. $r=\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$ 2. $t=\frac{-v_0+\sqrt{v_0^2+64S}}{32}$ 3. 18.75%
4. $12-2\sqrt{22}\approx 2.619$ ft
5. (a) 4.33 sec; (b) 1.87 sec; (c) 44.9 m

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۲۲۴) " (۲۲۵)

(2-7) 1. $12\frac{1}{2}$ 2. 4 3. $\frac{17}{3}$ 4. 5 5. $b=\sqrt{\frac{a^2}{A^2-1}}$, یا $\frac{a}{\sqrt{A^2-1}}$

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۲۴۲) ← " (۲۴۵)

(2-8) 1. (a) 9; (b) $\sqrt{x}=12-x$; $(12-x)^2=x$; $x=144-24x+x^2$;
$0=x^2-25x+144$; $0=(x-9)(x-16)$
(a) [illegible]
2. $\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{3}}{2}}$ 3. $\pm\sqrt{3}, 0$ 4. 125, −8
5. $\pm i\sqrt{3}, \pm 2$ 6. 350.63 ft

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۲۴۴) " (۲۴۹)

(2-9) 1. $y = 160x$   2. 4.5 kg   3. 50 volts   4. 176,250 tons

5. $y = \frac{6.4}{x}$   6. 7.5 hr   7. $\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$   8. $y = 3x^2$

9. $\frac{W_2}{W_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$   10. $y = \frac{9}{x^2}$   11. $\frac{A_2}{A_1} = \frac{b_2 h_2}{b_1 h_1}$   12. $y = 7xz$

13. $y = 7\frac{xz}{w^2}$   14. 2 sec   15. (a) 128 lb; (b) 4000 mi

جوابات تمرینات متن کتاب از صفحه (۲۵۷) " (۲۶۰)

(2-10) 1. $18{,}600 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$   2. $0.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$   3. 62 ft   4. $\frac{23}{20}$ kg   5. $105 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

6. 12 yd   7. 80 oz   8. $\frac{7}{10}$   9. $11.25 \frac{\text{in.-lb}}{\text{hr}^2}$   10. $4 \frac{\text{lb}^2}{\text{m}^2}$

11. 1224 in.   12. 58,080 ft   13. 18,000 sec   14. 20 yd

15. 36.96 km   16. 100 hr   17. $176 \frac{\text{ft}}{\text{sec}}$   18. 0.36 $\text{m}^2$

19. $50 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$   20. $300 \frac{¢}{\text{hr}}$

# REFERENCES


1. Marvin and Bittinger . Judlth A. BEECHER
   CDLLEGE ALGEBRA, Addison-wesley Pub. co.1988

2. Douglas c. Giencoli, PHYSICS, prentice Hall, 1989.

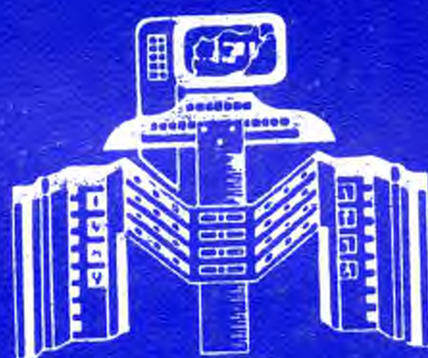
3. Arthur D. Karames, FUNDEMENTALS OF TECHNICAL MATHEMATIC WITH CALCULUS. Gregg Division, Mcgraw-Hill Book co,1984

4. MATHEMATIC HANDOUTS, by: Karyar at MTP,1990-1991.

University of Nebraska at Omaha

Education Sector Support Project

# BASIC ALGEBRA



Prepared & Translated
by
Engineer N.M. Karyar

## MANPOWER TRAINING PROGRAM

November 1991

مثال :

23. $|25 \div -5| = |-5| = 5$ ,

$|25| \div |-5| = 25/5 = 5$ ,

$|25/-5| = |25| / |-5|$

رابطه، $|a| = |-a|$ این مفهوم دارد. که فاصله a و a− نظربه قیمت صفرمساوی است .

24. $|(-3)^2| = |9| = 9 \qquad (-3)^2 = 9 \qquad |(-3)^2| = (-3)^2$

25. $|-3| = 3 \qquad |3| = 3 , \qquad |-3| = |3|$

**قضیه ۸ :**

برای هر یك از اعداد حقیقی a, b و هر عدد غیر صفر c ، میتوان نوشت:

1. $|ab| = |a| \times |b|$: 2. $|a \div c| = |a| \div |c|$:

3. $|a^n| = a^n$ - - - - - - - - - : اگر n عدد تام و جفت باشد

4. $|-a| = |a|$

---

**مثال ها :**

26. $|3x| = |3| \times |x| = 3|x|$

27. $|x^2| = x^2$

28. $|x^2 y^3| = |x^2| \times |y^3| = x^2 |y^3| = x^2 y^2 |y|$

29. $|x^2/y| = |x^2| / |y| = x^2 / |y|$

30. $|-3x| = 3|x|$

تمرین : از 40 الی 43 ساده نمائید ؟

40. $/ - 6ab /$

41. $/ x^{8} /$

42. $/ 10 m^{2} n^{3} /$

43. $/ - 2x^{3} / y^{2} /$

---

تمرین 2-1 : ساده نمائید ؟

1. $2^{3} \times 2^{-4}$

2. $3^{4} \times 3^{-5}$

3. $b^{2} \times b^{-2}$

4. $c^{3} \times c^{-3}$

5. $4^{2} \times 4^{-5} \times 4^{6}$

6. $5^{2} \times 5^{-4} \times 5^{5}$

7. $2x^{3} \times 3x^{2}$

8. $3y^{4} \times 4y^{3}$

9. $(5a^{2}b)(3a^{-3}b^{4})$

10. $(4xy^{2})(3x^{-4}y^{5})$

11. $(2x^{3})(3x^{2})$

12. $(4y^{2})(3y^{3})$

13. $(6x^{5}y^{-2}z^{3})(-3x^{2}y^{3}z^{-2})$

14. $(5x^{4}y^{-3}z^{2})(-2x^{2}y^{4}z^{-1})$

15. $b^{40} / b^{37}$

16. $a^{39} / a^{32}$

17. $x^{2}y^{-2} / x^{-1}y$

18. $x^{3}y^{-3} / x^{-1}y^{2}$

19. $9a^{2} / (-3a)^{2}$

20. $16y^{2} / (-4y)^{2}$

21. $24a^{5}b^{3}/8a^{4}b$

22. $30x^{6}y^{4}/5x^{3}y^{2}$

23. $12x^{2}y^{3}z^{-2}/21xy^{2}z^{3}$

24. $15X^{3}y^{4}z^{-3}/\quad 45xyz^{5}$

25. $(2ab^{2})^{3}$

26. $(4xy^{3})^{2}$

27. $(-2x^{3})^{4}$

28. $(-3x^{2})^{4}$

29. $-(2x^{3})^{4}$

30. $-(3x^{2})^{4}$

31. $(6a^{2}b^{3}c)^{2}$

32. $(5x^{3}y^{2}z)^{2}$

33. $(-5c^{-1}d^{-2})^{-2}$

34. $(-4x^{-1}z^{-2})^{-2}$

35. $(4^{-2}+2^{-4})/8^{-1}$

36. $3^{-2}+2^{-3}/7^{-1}$

37. $[(-2)^{4}+(-4)^{2}]/(-1)^{8}$

38. $[(-3)^{2}+(-2)^{4}]/(-1)^{6}$

39. $(3a^{2}b^{-2}c^{4})^{3}/(2a^{-1}b^{2}c^{-3})^{2}$

40. $(2a^{3}b^{-3}c^{3})^{3}/(3a^{-1}b^{-3}c^{-5})^{2}$

41. $6^{-2}x^{-3}y^{2}/3^{-3}x^{-4}y$

42. $5^{-2}x^{-4}y^{3}/2^{-3}x^{-5}y$

به یاداشت های ساینسی تبدیل کنید :

43. 58,000,000

44. 27,000

45. 365,000

46. 3645

47. 0.0000027

48. 0.0000658

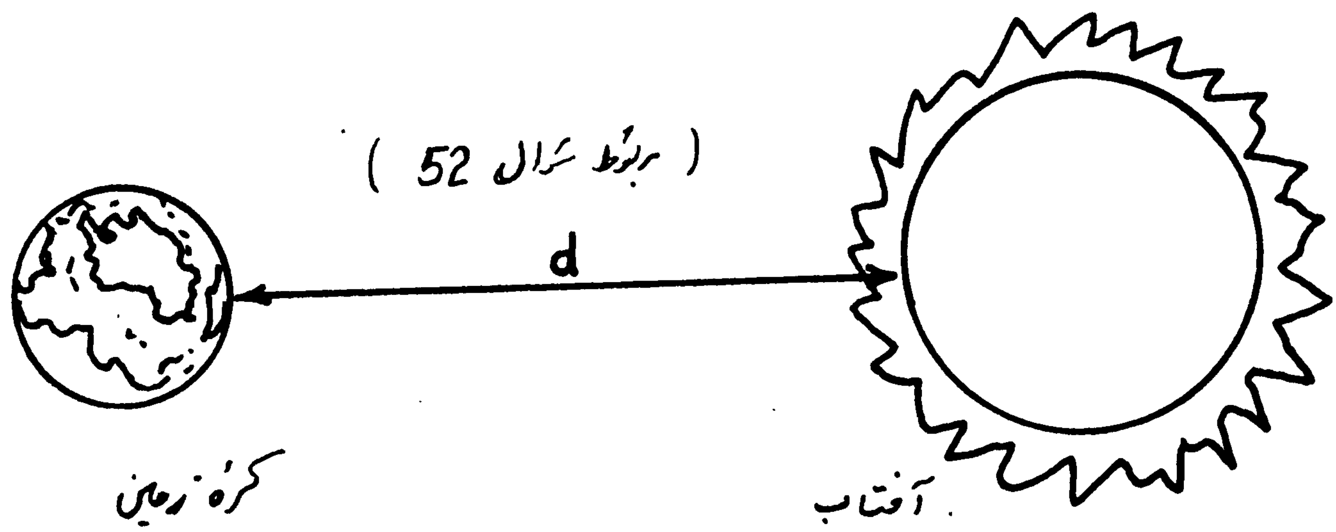
49. 0.027

50. 0.0038

51. $ 910,000,000,000

52. 93,000,000

52. 93,000,000 = ( فاصله بین کرهٔ زمین و آفتاب به واحد میل )




به یاداشت های عشاری تبدیل نمائید :

53. $4 \times 10^{5}$

54. $5 \times 10^{-4}$

55. $6.2 \times 10^{-3}$

56. $7.8 \times 10^{6}$

57. $7.69 \times 10^{12}$

58. $8.54 \times 10^{-7}$

59. $9.46 \times 10^{12}$ (نور به واحد کیلو متر که در یك سال حرکت میکند)

60. $1.7 \times 10^{-24}$ (کتله اتوم هایدروجن به گرام)

$(-x)^2 = ?$ ، $-x^2 = ?$ x را در یافت کنید در صورتیکه :

61. $x = 5$

62. $x = -7$

63. $x = -1.08$

64. $x = \sqrt{3}$

ساده نمائید :

65. $/9xy/$

66. $/y^4/$

67. $/3a^2 b/$

68. $/4a/b^2/$

ساده نمایید ، فرض کنید که تمام توان ها اعداد تام اند :

69. $(x^{t} x^{3t})^{3}$

70. $(x^{y} x^{-y})^{3}$

71. $(t^{a+x} \times t^{x-a})^{4}$

72. $(m^{x-y} \times n^{3y-x})^{t}$

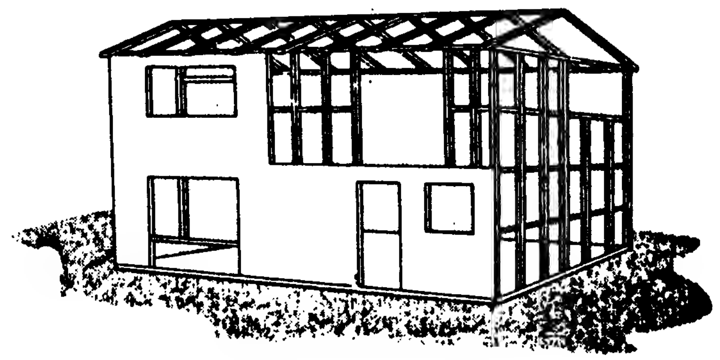
73. $(x^{a} y^{b} \times x^{b} y^{a})$

74. $(m^{x-b} \times n^{x+b})^{x} (m^{b} n^{-b})^{x}$

75. $\{(3x^{a} y^{b})^{3} / (-3x^{a} y^{b})^{2}\}^{2}$

76. $\{(x^{r} / y^{t})^{2} (x^{2r} / y^{4t})^{-2}\}^{-3}$

فورمول $\longrightarrow M = P\left[\dfrac{\frac{i}{12}\left(1+\frac{i}{12}\right)^{n}}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{n}-1}\right]$



M تادیه پول ماهانه قرضه از بابت خرید خانه ، p دالر به مفاد نرخ (i) قرضهٔ بانك، و n تعداد مجموع تادیه ها (۱۲ ضرب تعداد سال ها)

۷۷ــ قیمت یك خانه 92,000 $ و پیش پرداخت آن 14,000 $ میباشد . مفاد به نرخ % 10 3/4 است . وقت (مدت) قرضداری ۲۵ سال میباشد . تادیه ماهانه خانه را معلوم کنید ؟

۷۸ــ تمرین ۷۷ را برای مدت قرضداری 20 و 30 ساله تکراراً ، حل کنید .

در سوالات ذیل غلطی را پیدا کرده ، بعداً جواب صحیح آنرا در یافت نمائید .

79. $x^{4}(x^{3})^{2} = x^{9}$

80. $x^{4}y^{-7}/x^{-2}y^{5} = x^{2}/y^{2}$

81. $(2x^{-4}y^{6}z^{3})^{3} = 6x^{-1}y^{3}z^{6}$

---

## 3 - 1 جمع و تفریق افاده های الجبری

**اهداف :** شما قادر خواهیدشد که : با تکمیل کردن این مبحث .

ــ درجه هر حد را در پولینومیل و درجه پولینومیل را در یافت کنید.

پولینومیل ها و افاده های الجبری را جمع نمایید.

عکس جمعی افاده الجبری را در یافت کنید.

پولینومیل ها ، و افاده های الجبری را تفریق نمائید.

---

### الف) پولینومیل:

افاده های الجبری ذیل را بنام پولینومیل های یك متحوله می نامند .

$$x^5-9 \quad \text{و} \quad -5t^4 \quad \text{و} \quad 3y^3-5y^2+7y-4 \quad \text{و} \quad -7x+5$$

### تعریف:

هر افاده ء الجبری که به شکل ذیل باشد آنرا پولینومیل یك متحول[۱] مینامند .

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

در صورتیکه n عدد تام وغیر منفی باشد و $a_n$ ......... $a_0$ اعداد حقیقی بوده ، که بنام ضریب حد یاد میشود. بعضی یا تمام ضریبها صفر شده میتوانند . در افاده فوق هر حصه که ذریعه علامه ء مثبت جدا شده باشد آنرا حد میگویند.

آیا افاده ذیل یك پولینومیل است یا خیر؟

$$8x^3-6x^2+7x-5$$

---

(۱) متحول یك سیمبول است که اعداد مختلف را نمایندگی میکند. عموماً حروف به حیث متحول استعمال میشوند . اما تمام حروف متحول شده نمیتوانند.

این افاده پولینومیل است زیرا، آنرا چنین نوشته کرده میتوانیم .

$$8x^3 + (-6x^2) + 7x + (-5)$$

بخاطر داشته باشید که ضریب میتواند منفی باشد.

افاده های ذیل پولینومیل چندین متحوله میباشند ؟

$$5x^2y^3 + 17x^2y - 2\ , \quad 14a^2b\ , \quad \pi r^2 + 2\pi rh$$

مثال ۱ : پولینومیل $5x^3y - 7xy^2 + 2$ سه حد دارند :

که عبارت اند از : $5x^3y\ ,\ -7xy^2\ ,\ 2$

که ضریب های آن بالترتیب 5 ، 7 — ، و 2 میباشند .

— درجه یك حد : مجموع توانها ی متحولها میباشد. و درجه ء پولینومیل عبارت است از بزرگترین درجه حد پولینومیل . پولینومیل که ضریب متحول آن صفر داشته باشد درجه آن نیز صفر میشود.

مثال دوم : در پولینومیل : $5x^3y - 7xy^2 + 2$

درجه های حدود بالترتیب 4 ، 3 ، و صفر میباشند. و پولینومیل موصوف درجه 4 است .

پولینومیل یك حده را بنام مانومیل (Monomial) یاد میکنند.

پولینومیل دو حده را بنام بای نومیل (Binomial) یاد میکنند.

پولینومیل سه حده را بنام ترآی نومیل(Trinomail) یاد میکنند.

**احتیاط :**

در اکثر موارد ، حروف کلان و حروف خورد در افاده ها مفهوم جداگانه دارند، در وقت نقل کردن حرف خورد را عوض حرف کلان استعمال نه نمائید .

---

**تمرین :** در پولونیومیل های ذیل ، درجه حد و درجهٔ پولینومیل را بگوئید ؟

1. $x^8 - 7x^6 + 2x^4 - 3x^9 + 2$ 2. $8y^4 - 7xy^3 + 6x^2y^3 - 9x^5y - 1$

## ب: عملیه جمع :

اعمال اربعه یعنی : جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم افاده های الجبری که پولینومیل نمیباشند ، و پولینومیل ها به عین شکل اجراء میشود:

یا به عباره دیگر، هر عمل که ما میتوانیم در اعمال اربعه پولینومیل تطبیق نمائیم ، در مورد افاده های الجبری که پولینومیل نیست ، نیز تطبیق میشود. در ذیل افاده هائیکه که پولونیومیل نمیباشند نشان داده شده است :

3. $3\sqrt{x} + 4y$ 4. $(3x^2 + 2)/(x - 1)$ 5. $4x^{1/2} - 5y^{3/2}$

در جمع افاده ها آن دو حد افاده که دارای توان مساوی باشند ، باهم مشابه اند و باید با هم یکجا شوند مانند:

6. $$3x^2 - 4y + 2x^2 = 3x^2 + 2x^2 - 4y$$
$$= (3 + 2)x^2 - 4y$$
$$= 5x^2 - 4y$$

7. $4x^{1/2}y + 7x^{1/2}y = 11x^{1/2}y$ 8. $-2x^2\sqrt{y^3} + 5x^2\sqrt{y^3} = 3x^2\sqrt{y^3}$

تمرین ( الف )

اعداد ذیل را تحت مطالعه قرار دهید:

1, 3/4 , − 6 , 0 , 19 , −8/7

۱ــ اعدادطبیعی کدام اند ؟

۲ــ اعداد مکمل کدام اند ؟

۳ــ ارقام کدام اند ؟

٤ــ اعداد ناطق ( ریشنل ) کدام اند ؟

هر عددی که ناطق ( ریشنل ) نباشد آنرا غیر ناطق ( غیر ریشنل ) می نامند.

اعداد ناطق ( ریشنل ) ، و غیرناطق ( غیرریشنل )به چندین طریقه تشریح شده میتواند.

**ــ اعداد ناطق ( ریشنل ) عبارت اند از :**

۱ــ تمام اعدادیکه با کسر a/b تشریح شده بتواند در صورتیکه a و b تام باشند و b مساوی به صفر نشود. $b \neq 0$ ( از نقطه نظر تعریف )

۲ــ تمام اعدادیکه قیمت های عشاری آنها پایان یابد، یا تکرارشوند( اعداد متوالی )

مثال ها: اعدادذیل ریشنل اند:

1. $5/16 = 0.3125$

2. $-8/7 = -1.142857142857 \ldots\ldots\ldots \rightarrow = -1.\overline{142857}$ متوالی و ناطق است .

3. $3/11 = 0.27\,27$ ---------> $0.\overline{27}$ این عدد هم متوالی و هم ریشنل است .

خط بالائی نشان میدهد که اعدادیکه دوباره تکرار میشوند اعداد متوالی اند .

**ــ اعدادغیر ناطق ( غیرریشنل ) عبارت انداز :**

۱ــ آن اعدادحقیقی که ناطق ( ریشنل ) نباشند. ( از نقطه نظر تعریف )

۲ــ تمام اعدادیکه به کسر a/b تشریح شده نتوانند، در صورتیکه a، وb تام بوده و

تمرین : از 3 الی 5 جمع نمائید :

3. $5x^3y^2 - 2x^2y^3 + 4x^3y^2$ 4. $3xy^2 - 4x^2y + 4xy^2 + 2x^2y$

5. $5x^4\sqrt{y} - 2x^4\sqrt{y} + 2$

---

جمع کردن دو پولینومیل چنین صورت میگیرد :

$(-3x^3 + 2x - 4)$ و $(+4x^3 + 3x^2 + 2)$

$(-3x^3 + 2x - 4) + (4x^3 + 3x^2 + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$

---

تمرین : جمع کنید :

6. $3x^3 + 4x^2 - 7x - 2$
$+ \quad -7x^3 - 2x^2 + 3x + 1/2$ و

---

7. $5p^2q^4 - 2p^2q^2 - 3q$
$+ \quad -6pq^2 + 3p^2q^2 + 5$ و

---

## ج: عکس جمعی :

عکس جمعی یك افاده ، با گذاشتن علامه مخالف در پیشروی آن بدست می آید .

### قضیه نهم :

عکس جمعی یك پولینومیل با تعویض کردن تمام حد های آن با علامه مخالف بدست می آید .

**مثال :** برای افاده ذیل دو افاده عکس جمعی معادل عبارت اند از :

$$-3xy^2 + 4x^2y - 5x - 3$$

$-(-3xy^2 + 4x^2y - 5x - 3)$ یا $3xy^2 - 4x^2y + 5x + 3$

مثال : دو افاده عکس که معادل آن باشد ، در یافت کنید :

$$7ab^2 - 6ab - 4b + 8 .$$

1. $-(7ab^2 - 6ab - 4b + 8)$

2. $-7ab^2 + 6ab + 4b - 8 .$

تمرین : معادل و عکس جمعی افاده های ذیل را دریافت کنید :

8. $5x^2t^2 - 4xy^2t - 3xt + 6x - 5$

9. $-3x^2y + 5xy - 7x + 4y + 2$

## عملیه تفریق :

در عملیه تفریق دو پولینومیل ، عیناً عملیه جمع را اجراء می نمائیم ، با این تفاوت که در اینجا عکس جمعی ( منفی ) مفروق را با مفروق منه جمع مینمائیم . یا به عباره دیگر ، تمام علامه های آن پولینومیل را که تفریق میشود، تغیر میدهیم و بعداً با پولینومیل اول ( مفروق منه ) ، جمع می نمائیم .

**مثال۱۲:** تفریق نمایید.

$$(-9x^5 - x^3 + 2x^2 + 4) - (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3x^2)$$
$$= (-9x^5 - x^3 + 2x^2 + 4) + \{-(2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3x^2)\}$$
$$= (-9x^5 - x^3 + 2x^2 + 4) + (-2x^5 + x^4 - 4x^3 + 3x^2)$$
$$= -11x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4$$

**از مثال های قبلی چنین مفهوم میبرایید ، که هر گاه قوس را رفع نمائیم علامهء ( — ) که قبل از قوس موجود باشد بعد از رفع قوسین تمام علامه های داخل قوس را تغیرمیدهد.**

**مثال ۱۲:** پولینومیل دوم را از پولینومیل اول تفریق نمایید.

نخست ، علامه های پولینومیل دوم را تغیر بدهید بعداً عملیه جمع را اجراء کنید.

$$4x^2y - 6x^3y^2 \qquad + x^2y^2 - 5y \qquad \text{(اول)}$$

$$\underset{-}{+}4x^2y \underset{-}{+} x^3y^2 \underset{-}{+} 3x^2y^3 \qquad \underset{-}{+} 6y \qquad \text{(دوم)}$$

$$0 \leftarrow \quad \overline{-7x^3y^2 - 3x^2y^3 + x^2y^2 - 11y}$$

**تمرین : (۱۱ – ۱۰)**

تفریق نمائید :

10. $(5xy^4 - 7xy^2 + 4x^2 - 3)$
$-(-3xy^4 + 2xy^2 - 2y + 4)$

11. $5x^2y - 7x^3y^2 - x^2y^2 + 4y$
$-2x^2y + 2x^3y^2 - 5x^2y^3 - 5y$

---

## تمرین ۲_۱:

---

**الف)** : درجهء هر حد و درجه ء پولینومیل را تعین نمایید .

1. $-11x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 9$
2. $t^3 - 3t^2 + t + 1$
3. $y^3 + 2y^6 + x^2y^4 - 8$
4. $u^2 + 3v^5 - u^3v^4 - 7$
5. $a^5 + 4a^2b^4 + 6ab + 4a - 3$
6. $8p^6 + 2p^4t^4 - 7p^3t + 5p^2 - 14$

**ب)** : جمع نمایید.

7. $5x^2y - 2xy^2 + 3xy - 5$
$-2x^2y - 3xy^2 + 4xy + 7$

8. $6x^2y - 3xy^2 + 5xy - 3$
$-4x^2y - 4xy^2 + 3xy + 8$

9. $3pq^2 - 5p^2q + 4pq + 3$

$-7pq^2 + 3pq - 4p + 2q$

10. $-5pq^2 - 3p^2q + 6pq + 5$

$-4pq^2 + 5pq - 6p + 4q$ و

11. $2x + 3y + z - 7$

$4x - 2y - z + 8$ و

$3x + y - 2z - 4$ و

12. $2x^2 + 12xy - 11$

$6x^2 - 2x + 4$ و

$-x^2 - y - 2$ و

13. $7x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x} + 1/5$

$-2x\sqrt{y} - y\sqrt{x} - 3/5$

14. $10x\sqrt{y} - 4y\sqrt{x} + 4/3$

$-3x\sqrt{y} - y\sqrt{x} - 1/3$

(ج) : عکس جمعی افاده های ذیل را بنویسید.

15. $5x^3 - 7x^2 + 3x - 6$

16. $-4y^4 + 7y^2 - 2y - 1$

(د) : تفریق نمایید .

17. $(3x^2 - 2x - x^3 + 2) - (5x^2 - 8x - x^3 + 4)$

18. $(5x^2 + 4xy - 3y^2 + 2) - (9X^2 - 4xy + 2y^2 - 1)$

19. $(4a - 2b - c + 3d) - (-2a + 3b + c - d)$

20. $(5a - 3b - c + 4d) - (-3a + 5b + c - 2d)$

21. $(x^4 - 3x^2 + 4x) - (3x^3 + X^2 - 5X + 3)$

22. $(2x^4 - 5x^2 + 7x) - (5x^3 + 2x^2 - 3x + 5)$

23. $(7x\sqrt{y} - 4y\sqrt{x} + 7.5) - (-2x\sqrt{y} - y\sqrt{x} - 1.6)$

24. $(10x\sqrt{y} - 4y\sqrt{x} + 4/3) - (-3x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - 1/3)$

(ذ) : ذریعه کلکولیتر ساده سازید.

25. $(0.565p^2q - 2.167pq^2 + 16.02pq - 17.1)$

$+ (-1.612p^2q - 0.312pq^2 - 7.141pq - 87.044)$

26. $(5003.2xy^{-2} + 3102.4\sqrt{xy} - 5280)$

$- (2143.6xy^{-2} + 6153.8xy - 4141\sqrt{xy} + 4979.12)$

# ضرب افاده های الجبری

**هدف :** شما قادر خواهیدشد که با تکمیل کردن این مبحث ،

ـ دوپولینومیل مختلف را باهم باسرعت و دقت ضرب نمائید.

آنقدر تمرین نمائید: که بدون اجراء عملیه جواب را بدست آورده بتوانید .

---

**الف: ضرب کردن دوپولینومیل :**

هرحدیك پولینومیل را باهرحد پولبنومیل دیگرضرب میکنیم ونتیجه راجمع مینماییم .

مثال اول :

$2y - 3x^2y$ را به $4x^4y - 7x^2y + 3y$ ضرب کنید

---

حل ... $4x^4y - 7x^2y + 3y$

$2y - 3x^2y$

---

اول .... به $2y$ ضرب کنید ------- $8x^4y^2 - 14x^2y^2 + 6y^2$

دوم ... به $-3x^2y$ ضرب کنید ------ $-12x^6y^2 + 21x^4y^2 - 9x^2y^2$

---

اول ، ودوم ... را جمع نمایید ....... $-12x^6y^2 + 29x^4y^2 - 23x^2y^2 + 6y^2$

**تمرین :**

---

باهم ضرب نمایید :

1. $(3x^2y - 2xy + 3y)(xy + 2y)$
2. $(p^2q + 2pq + 2q)(2p^2q - pq + q)$

## حاصل ضرب دو بای نومیل :

هنگامیکه دوبای نومیل ( پولینومیل دو حده ) را باهم ضرب می نماییم، قاعدهء را که توسط تیر ها در مثال ذیل نشان داده شده بکار میبریم . واین قاعده در ضرب نمودن دوافاده الجبری نیز صدق میکند .

مثال : ضرب نمائید :

2. $(3xy + 2x)(x^2 + 2xy^2) = 3x^3y + 6x^2y^3 + 2x^3 + 4x^2y^2$

3. $(x + \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) = xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2$

4. $(2x - \sqrt{3})(y + 2) = 2xy + 4x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3}$

5. $(2x + 3y)(x - 4y) = 2x^2 - 5xy - 12y^2$

---

تمرین : ضرب نمایید :

3. $(2xy + 3x)(x^2 - 2)$

4. $(3x - 2y)(5x + 3y)$

5. $(2x + \sqrt{2})(3y - \sqrt{2})$

---

## مربع ساختن بای نومیل ها :

مربع حداول، جمع یا (منفی) دو چند حاصل ضرب هر دو حد، جمع مربع حدآخر .

مانند:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B) = A^2 - 2AB + B^2$$

مثال: ضرب نمائید :

6. $(2x + 9y^2)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(9y^2) + (9y^2)^2$

$$= 4x^2 + 36xy^2 + 81y^4$$

7. $(3x^2 - 5xy^2)^2 = (3x^2)^2 - 2(3x^2)(5xy^2) + (5xy^2)^2$

$$= 9x^4 - 30x^3y^2 + 25x^2y^4$$

**احتیاط :**

مربع یك مجموعه مساوی به مجموعه مربع های آن نیست : $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2$

---

تمرین : انکشاف بدهید :

6. $(4x - 5y)^2$

7. $(2y^2 + 6x^2y)^2$

---

حاصل ضرب دو بای نومیل که علامه یکی آن مثبت ودومی آن منفی باشد چنین بدست میآید : $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

پس حاصل ضرب، جمع و تفریق دو حد مساوی به تفاضل مربع آنها میشوند مانند:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + AB - B^2$$ یا

$$= A^2 - B^2$$

مثال : ضرب نمایید :

8. $(y+5)(y-5) = y^2 - 25$

9. $(3x+2)(3x-2) = (3x)^2 - 2^2$

$$= 9x^2 - 4$$

10. $(2xy^2 + 3x)(2xy^2 - 3x) = (2xy^2)^2 - (3x)^2$

$$= 4x^2y^4 - 9x^2$$

11. $(5y+\sqrt{2})(5x-\sqrt{2}) = (5x)^2 - (\sqrt{2})^2$

$$= 25x^2 - 2$$

12. $(5y+4+3x)(5y+4-3x) = (5y+4)^2 - (3x)^2$

$$= 25y^2 + 40y + 16 - 9x^2$$

13. $(3xy^2+4y)(-3xy^2+4y) = (4y+3xy^2)(4y-3xy^2)$

$$= (4y)^2 - (3xy^2)^2$$

$$= 16y^2 - 9x^2y^4$$

---

**تمرین : از 8 تا 12 حل کنید :**

8. $(4x+7)(4x-7)$

9. $(5x^2y+2y)(5x^2y-2y)$

10. $(4y^2+\sqrt{3})(4y-\sqrt{3})$

11. $(2x+3+5y)(2x+3-5y)$

12. $(-2x^3y^2+5t)(2x^3y^2+5t)$

---

**مکعب ساختن بای نومیل ها :**

$$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2$$

$$= (A+B)(A^2+2AB+B^2)$$

$$= (A+B)A^2 + (A+B)2AB + (A+B)B^2$$

$$= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3$$

$$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

نتیجه را چنین خلاصه می نمائیم :

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

ضرب نمائید :

14. $(x+2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

15. $(x-2)^3 = \{x+(-2)\}^3$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

16. $(5m^2 - 4n^3)^3 = (5m^2)^3 + 3(5m^2)^2(-4n^3) + 3(5m^2)(-4n^3)^2 + (-4n^3)^3$

$= 125m^6 - 300m^4n^3 + 240m^2n^6 - 64n^9$

---

**تمرین** : از 13 الی 16 حل کنید :

13. $(x+1)^3 = ?$

14. $(x-1)^3 = ?$

15. $(t-3b)^3 = ?$

16. $(2a^3 - 5b^2)^3 = ?$

---

تکرار :

**اول، افاده الجبری چیست :**

عبارت است از حالت جمع ، یا منفی مشترک حدود الجبری . در ذیل یك افاده الجبری نشان داده شده(I) $ax^2 + by^2 - ab + 4c$ ........... طوریکه دیده میشود هر جز افاده مذکور توسط علامه های جمع یا منفی از هم جدا شده که بنام(حد) یاد میشود.

در افاده فوق $ax^2$، $by^2$ ، ab ، و 4c هر کدام یك یك حد است .

**دوم:** مطابقت های ذیل در الجبر صدق میکند و در عملیه های الجبری از آن

(b) مساوی به صفر نباشد.

۲ـ آن اعداد حقیقی که اعداد عشاری آن آخر نمیشوند ، و دوباره تکرار هم نمیشوند .

اعداد غیرناطق ( غیر ریشنل ) بسیار زیاد اند . بطور مثال :

$(\sqrt{2})$, $\sqrt{3}$ , $-\sqrt{14}$ , $\sqrt{45}$ , $\pi\,(22/7)$ * , $\sqrt{10}$ , $\sqrt{7}$ , $\sqrt{11}$

...اعداد غیر ناطق ( غیر ریشنل ) میباشند .

مثال های دیگر اعداد غیرناطق ( غیر ریشنل ) عبارت انداز :

مثال : اعداد عشاری دوباره تکرار نمیشوند ..........$\pi = 3.1415926535$ .4

اعداد عشاری دوباره تکرار نمیشوند ..... $-1.1010010001000010000001$ .5

اعداد عشاری دوباره تکرارنمیشوند ......................... $\sqrt[3]{2} = 1.25992105$ .6

---

**تمرین ( ب ) :**

تمرینات 10←5 را تکمیل نمایید .

ـ در ذیل کدام اعداد ناطق (ریشنل) ا ند ؟ و کدام اعداد ( غیر ریشنل ) اند ؟

(5- : $-4/5$, $-\sqrt{64}$, 7.42, 0.47474747; ( تکرار میشود )

-10) : 2. 57340046631 .... (تکرار نمیشود) $\sqrt{27}$,

* چون قیمت $\pi$ غیر ناطق است ، لذا 22/7 عدد کسری شده نمیتواند .

---

در حساب ، جهت محاسبه و پیدا کردن جواب ، اعداد را بکار میبریم ، در حالیکه در علم الجبر به همین منظور سیمبولها بکار برده میشوند. و بر علاوه آن ، سیمبولها را در عملیه های جمع و تفریق ، ضرب ، و تقسیم استعمال می نمائیم . علم الجبر در حقیقت علم پیشرفته تر حساب است ، وبرای حل پرابلم ها یك وسیله قوی تر میباشد.

استفاده میشود .

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \qquad (A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

## خلاصه اعمال اربعه الجبری

I. جمع الجبری :

هنگامیکه جمع الجبر را اجراء می نماییم ، بر عکس جمع حساب ، نتیجه ء جمع را باعلامه مثبت یا منفی نشان میدهیم . به عبارت دیگر حدهای مثبت و منفی را باهم طوری جمع می نماییم که علامه ء حد بزرگ در نتیجه جمع ظاهر شود.

مثلاً : ---------- $-ax + ax + 2ax - 4ax = -2ax$

جواب ------------------ $-2ax$

در مثال فوق دیده میشود که حد $-4ax$ ، از $2ax$ بزرگتر است . لذا در نتیجهٔ عملیهٔ جمع ، علامهٔ (—) دیده میشود. قاعده‌ء فوق در مثالهای ذیل نیز مشاهده میشود .

$2x + 3x - 6x = -x$

## II. تفریق الجبری :

تفریق الجبری مانند عملیه‌ء جمع است . در اینجا صرف ، علامهٔ های حد های (مفروق) تغیر میخورند . یعنی اگر مثبت باشند منفی میشوند و اگر منفی باشند مثبت میشوند .

مثال:

| | | |
|---|---|---|
| $ab + ax - y$ | .................................... | مفروق منه |
| $\underset{-}{}y \underset{-}{+} ab \underset{+}{-} ax$ | .................................... | مفروق |
| $2ax - 2y$ | .................................... | حاصل تفریق |

در این مثال دیده میشود که علامات مفروق تغیر خورده بعداً ، عیناً عملیه جمع الجبری اجراء شده است .

$$12ab + 6xy - 12 \;\ldots\ldots \text{(مثال سوم)} \qquad 2ax + 5yz \;\ldots\ldots \text{(مثال دوم)}$$

$$\underline{\overset{-}{}6ab \underset{-}{+} 4xy \underset{+}{-} 6} \qquad \underline{\overset{-}{}4ax \underset{+}{-} 2yz}$$

$$6ab + 2xy - 6 \qquad - 2ax + 7yz$$

جواب ( دوم ) ......... $-2ax + 7yz$

جواب ( سوم ) ......... $6ab + 2xy - 6$

### III. ضرب الجبری :

در ضرب الجبری ، عموماً دو طرز العمل عمده را باید در نظر داشته باشیم :

۱ـ نتیجهء ضرب علامات (یکسان مثبت یا منفی)، مساوی به مثبت است و نتیجهء ضرب علامات مختلف مساوی به منفی است . $(+)(+) = +, (-)(-) = +$

$(+)(-) = -, (-)(+) = -$

۲ـ در عملیه ضرب ، هر گاه قاعده های دو یاچند حد ، باهم مساوی باشند ، در آنصورت صرف توان های آنها با هم جمع میشوند .

مثال : $(b^3)(b^2) = b^5$

مثال دوم: $(a^2bx)(ab) = a^3b^2x$

### IV. تقسیم الجبری:

در عملیه تقسیم الجبری ، مانند عملیه ضرب، باید دو طرز العمل را در نظر داشته باشیم :

۱ـ تقسیم علامات باهم مختلف، مساوی به منفی است : $(-)/(+) = (+)/(-) = -$

۲ــ درعملیه تقسیم الجبری ، هر گاه قاعده های مقسوم و مقسوم علیه یکسان باشند در آنصورت ، صرف توان مقسوم علیه از توان مقسوم تفریق میگردد .

مثال : $a^2 / a = a^{2-1} = a^1 = a \; , \; a^2 x^3 b / x^2 b = a^2 x$

احتیاط : کل مربع یك بای نیومیل مساوی به مجموع مربع هر حد نیست .

مانند: $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2$

---

## تمرین ٤ــ۱

---

ضرب نمایید :

1. $2x^2+4x+16$ و $3x-4$
2. $3y^2-3y+9$ و $2y+3$
3. $4a^2b-2ab+3b^2$ و $ab-2b+1$
4. $2x^2+y^2-2xy$ و $x^2-2y^2-xy$
5. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
6. $(t+1)(t^2-t+1)$
7. $(2x+3y)(2x+y)$
8. $(2a-3b)(2a-b)$
9. $(4x^2-(1/2)y)(3x+(1/4)y)$
10. $(2y^3+(1/5)x)(3y-(1/4)x)$
11. $(\sqrt{2}x^2-y^2)(\sqrt{2}x-2y)$
12. $(\sqrt{3}\cdot y^2-2)(\sqrt{3}y-x)$
13. $(2x+3y)^2$
14. $(5x+2y)^2$
15. $(2x^2-3y)^2$
16. $(4x^2-5y)^2$
17. $(2x^3+3y^2)^2$
18. $(5x^3+2y^2)^2$
19. $((1/2)x^2-(3/5)y)^2$
20. $((1/4)x^2-(2/3)y)^2$

21. $(0.5x + 0.7y^2)^2$

22. $(0.3x + 0.8y^2)^2$

23. $(3x - 2y)(3x + 2y)$

24. $(3x + 5y)(3x - 5y)$

ضرب نمائید :

25. $(x^2 + yz)(x^2 - yz)$

26. $(2x^2 + 5xy)(2x^2 - 5xy)$

27. $(3x^2 - \sqrt{2})(3x^2 + \sqrt{2})$

28. $(5x^2 - \sqrt{3})(5x^2 + \sqrt{3})$

29. $(2x + 3y + 4)(2x + 3y - 4)$

30. $(5x + 2y + 3)(5x + 2y - 3)$

31. $(x^2 + 3y + y^2)(x^2 + 3y - y^2)$

32. $(2x^2 + y + y^2)(2x^2 + y - y^2)$

33. $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$

34. $(y - 2)(y + 2)(y^2 + 4)$

35. $(2x + y)(2x - y)(4x^2 + y^2)$

36. $(5x + y)(5x - y)(25x^2 + y^2)$

37. $(0.051x + 0.04y)^2$

38. $(1.032x - 2.512y)^2$

39. $(37.86x + 1.42)(65.03x - 27.4)$

40. $(3.601x - 17.5)(47.105x + 31.23)$

41. $(y + 5)^3$

42. $(t - 7)^3$

43. $(m^2 - 2n)^3$

44. $(3t^2 + 4)^3$

ضرب نمائید در صورتیکه n عدد طبیعی باشد .

45. $(a^n + b^n)(a^n - b^n)$

46. $(t^a + 4)(t^a - 7)$

47. $(x^m - t^n)^3$

48. $y^3 z^n (y^{3n} z^3 - 4yz^{2n})$

49. $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$

50. $(a^n + b^n)^2$

51. $\{(2x-1)^2-1\}^2$

52. $\{(a+b)(a-b)\}\{5-(a\quad+b)\}\{5+(a+b)]$

53. $(x^{a-b})^{a+b}$

54. $(t^{m+n})^{m+n}(t^{m-n})^{m-n}$

55. $(a+b+c)^2$

56. $(a+b+c)^3$

57. $(a+b)^4$

58. $(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

59. $(m+t)(m^4-m^3t+m^2t^2-mt^3+t^4)$

60. $(a-b)(a^7+a^6b+a^5b^2+a^4b^3+a^3b^4+a^2b^5+ab^6+b^7)$

در سوالات ذیل غلطی ها را تفکیك نمائید ، دلیل غلطی را بیان کنید ، و بعداً جواب صحیح آنرا بدست بیاورید .

61. $(3a+b)^2=3a^2+b^2$

62. $(2x-3y)(2x-3y)=4x^2-9y^2$

63. $2x(x+3)+4(x^2-3)=2x^2+3x+4x^2-3$ .............. (1)

$=6x^2+x$ .................................. (2)

64. $(2a-3b)(3a+2b)=6a^2-6b^2$ ............. (1)

$=a^2-b^2$ .................(2)

ضرب نمائید در صورتیکه n عدد طبیعی باشد .

65. $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots\ldots\ldots+x^3y^{n-4}+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1})$

# قضیه بای نومیل

اهداف : شما قادر خواهید بود که با تکمیل کردن این مبحث .

توان یك بای نیومیل $(a+b)^n$ ، را با استفاده از مثلث پاسکال انکشاف بدهید.

توان یك بای نیومیل $(a+b)^n$ ، را با استفاده ضریب قبلی انکشاف داده بتوانید.

اصطلاح ( فیکتوریل ) را ارزیابی کرده ، و بتوانید حد مشخص یك بای نیومیل را قبل از انکشاف آن تعیین و بنویسید .

---

## الف: انکشاف بای نومیل با استفاده از مثلث پاسکال:

انکشاف بای نومیل ذیل را که توان آن n است ، و n یك عدد طبیعی میباشد ، تحت مطالعه قرار میدهیم :

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

هر انکشاف فوق یك پولینومیل است، که هر کدام آن دارای اوصاف جداگانه میباشد:

۱ــ در هر حد مجموع توان ها مساوی به n است .

۲ـ توان a از n شروع شده به صفر ختم میشود. حد آخر ، ضریب a ندارد . و حد اول ضریب b ندارد . توان b در حد د وم از (1) شروع شده تا به n میرسد. یا توان b از صفر ، درحد اول شروع ، تا به n میرسد .

۳ـ تعداد حدها از عدد n یك زیاد تر میباشد یا به عباره دیگر؛ رابطه ، $(a+b)^n$، به $1+n$ حد انکشاف می یابد .

٤ـ ضریب حد اول و حد اخر یك میباشد. اگر درمثلث پاسکال دقت شود، ضریب های حدود با هم متناظر اند. که از یك شروع شده، تا به حصه نصف حد ها بزرگتر شده میروند. و بعد از حصه نصف دوباره خورد تر شده و دوباره به یك میرسد. فرضاً میخواهیم افاده $(a+b)^8$ را انکشاف بدهیم : چون انکشاف این مطابقت 9 حد میشود که در ذیل ملاحظه مینمائید.

$$a^8+c_1 a^7 b+c_2 a^6 b^2+c_3 a^5 b^3+c_4 a^4 b^4+c_3 a^3 b^5+c_2 a^2 b^6+c_1 a b^7+b^8$$ ضریب‌اند. c

خلاصه ، انکه ضریب ها را به سه طریقه میتوان دریافت نماییم و هر طریقه که سهل تر بوده ، آنرا بکار ببرید .

## طریقه اول : مثلث پاسکال :

ضریب های هر حد را به اساس مثلث دریافت میکنیم :

$(a+b)^0$ : 1

$(a+b)^1$ : 1 1

$(a+b)^2$ : 1 2 1

$(a+b)^3$ : 1 3 3 1

$(a+b)^4$ : 1 4 6 4 1

$(a+b)^5$ : 1 5 10 10 5 1

وقتیکه مثلث بالا راتکمیل نمودیم ، انکشاف آنرا طوری پیش برده میتوانیم که دو عدد همجوار افقی راجمع نموده، در حصه وسط درتحت آن مجموع آنرا می نویسیم که این طریقه در شکل ذیل بخوبی واضح است . ضریب های بای نومیل ، $(a+b)^6$ :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

در قطار اخیر این مثلث پاسکال ملاحظه میشود که : 1 : ............ عدد اول

عدد دوم ........ 1 + 5 , = 6 :

عدد سوم .......... 5 + 10 , = 15 :

عدد چارم ........ 10 + 10 = 20 :

عدد پنجم ...................... 10 + 5 = 15 :

عدد ششم ......................... 5 + 1 = 6 :

لهذا _ _ _ _ _ _ _ _ _ $(a+b)^6 = ?$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

جهت انکشاف دادن رابطه : $(a+b)^8$ میخواهیم دو قطار متباقی مثلث پاسکال را

تکمیل نماییم :

برای ضریب های بای نومیل $(a+b)^8$ مثلث ذیل را تکمیل می نمائیم .

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

انکشاف رابطهٔ $(a+b)^8$ ، عبارت است از :

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7 b + 28a^6 b^2 + 56a^5 b^3 + 70a^4 b^4 + 56a^3 b^5 + 28a^2 b^6 + 8ab^7 + b^8$$

## قضیه دهم: قضیه بای نومیل:

برای هر بای نومیل $(a+b)^n$ و عدد طبیعی n داریم :

$$(a+b)^n = c_0 a^n b^0 + c_1 a^{n-1} b + c_2 a^{n-2} b^2 + \dots\dots\dots + c_{n-1} a^1 b^{n-1} + c_n a^0 b^n$$

در صورتیکه : $c_0 , c_1 , c_2$ ......... و $c_n$ از $(n+1)$ ام قطار ، مثلث پاسکال $c_0 = c_n = 1$ باشد .

تمر ین : بااستفاده از مثلث پاسکال ، مطابقت های ذیل را انکشاف بدهید .

2. $(a+b)^9$ ,　　　3. $(x-y)^4$

مثال اول :

انکشاف بدهید :

$(u-v)^5$ , $a = u$ , $b = -v$ , $n = 5$

جهت دریافت کردن ضریب ها ، حد ها قطار ششم را بکار میبریم :

1 ، 5 ، 10 ، 10 ، 5 ، 1 زیرا توان مطابقت 5 است .

$$(u-v)^5 = (u)^5 + 5(u)^4(-v)^1 + 10(u)^3(-v)^2 + 10(u)^2(-v)^3$$

$$+5(u)(-v)^4 + (-v)^5$$

$$= u^5 - 5u^4 v + 10u^3 v^2 - 10u^2 v^3 + 5uv^4 - v^5 .$$ قطار6 مثلث پاسکال

مثال دوم :

انکشاف بدهید . $(2t+3/t)^6$

چون توان 6 است ، لذا : ................................... $a=2t, b=3/t$ , $n=6$

قطار هفتم مثلث پاسکال ....... 1　6　15　20　15　6　1

$$(2t+3/t)^6 = (2t)^6 + 6(2t)^5(3/t) + 15(2t)^4(3/t)^2 + 20(2t)^3.(3/t)^3$$

$$+ 15(2t)^2(3/t)^4 + 6(2t)(3/t)^5 + (3/t)^6$$

$$= 64t^6 + 6(32t^5)(3/t) + 15(16t^4)(9/t^2) + 20(8t^3)(27/t^3)$$

$$+ 15(4t^2)(81/t^4) + 6(2t)(243/t^5) + 729/t^6 .$$

$$= 64t^6 + 576t^4 + 2160t^2 + 4320 + 4860 X t^{-2} + 2916 t^{-4} + 729t^{-6}$$

## ب: قیمت مطلقه

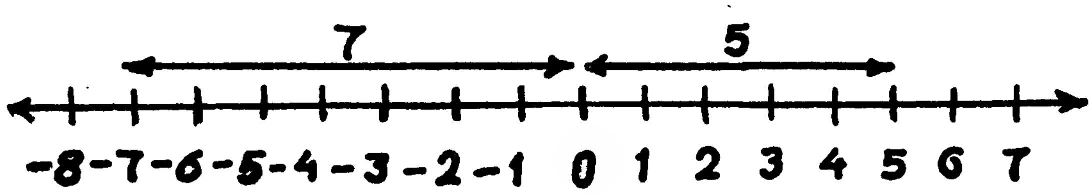
قبل از اینکه ما عملیه جمع را تحت مطالعه قرار دهیم باید خاطر نشان ساخت که قیمت مطلقه یك عدد ، عبارت از فاصله آن عدد از عدد صفر بالای یك خط درجه دار میباشد. ما قیمت مطلقه را در دروس آینده به وجه دقیق مطالعه می نمائیم ، اما آن را فعلا فاصلهء ، بالای خط مستقیم تلقی می نمائیم . قیمت مطلقهء یك عدد a به شکل / a / نشان داده میشود.

مثالها: سا ده نمایید ؟

7. /−7/ ----> 7 ← فاصله بالای خط از صفر تا ‎7 = / 7 − /‎

8. /5/ ----> 5 ← - - - - فاصله بالای خط از صفر تا ‎5 = / 5 /‎,

9. /0/ ----> 0 ← فاصله بالای خط از صفر تا صفر ‎0 = / 0 /‎,




وقتیکه قیمت مطلقه یکعدد منفی مطلوب باشد، صرف علامه آنرا تغیر میدهیم . یعنی ( آنرا مثبت میسازیم ) . قیمت مطلقه عدد غیر منفی خودهمان عدد است.

مثال : ‎/ 2/3 / = 2/3 , / − 9.7 / = 9.7‎

---

**تمرین :**

تمرین 11 ← 14 را اجراء نمایید ؟

ساده نمائید : 11 → 14 :

$/ 2 /, \quad /\sqrt{3}/ , \quad / -11.3 / , \quad / -3/4 /$

تمرین : انکشاف بدهید :

4. $(2t+1/t)^7 = ?$

---

## طریقه دوم : انکشاف بای نومیل ، استفاده از ضریب قبلی آن :

یك نقص که در طریقه مثلث پاسکال به نظر میرسد ، اینست که : وقتیکه یك قطار معین را در مثلث تکمیل مینماییم ، مجبور هستیم تا نخست قطار های قبلی را تکمیل نماییم . یا به عباره دیگر قطار های بعدی را قبل از تکمیل کردن قطار های قبلی معلوم کرده نمیتوانیم . جهت از بین بردن این مشکل دو طریقه جدید معرفی میگردند:

مثال : انکشاف $(a+b)^5$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

ششم، پنجم، چارم، سوم، دوم، اول ← حدها

برای در یافت ضریب بعد ی، ضریب های قبلی رادر نظر میگیریم مانند :

ضریب حد اول ( 1 ) است .

ضریب حد دوم عبارت از حاصل ضرب ضریب حداول ==> ( 1 ) ضرب توان حد a در حد قبلی تقسیم بر ( 1 ) یا $1X5 / 1 = 5$ ........................→ 2 -- 1

ضریب حد سوم : عبارت لز حاصل ضرب ، ضریب قبلی ==> ( 5 ) ضرب توان حرف a در حد قبلی ==> (4) ، تقسیم بر (2) . یا $5 X 4 / 2 = 10$ ...........→ 3 -- 1

ضریب حد چارم : عبارت است از حاصل ضرب ضریب قبلی (10) ضرب توان حرف a در حد قبلی ==> یا (3) ، تقسیم بر(3) . یا $10 X 3 / 3 = 10$ .........→ 4 -- 1

ضریب حد پنجم : عبارت است از حاصل ضرب ضریب قبلی (10) ، ضرب توان حرف a در حد قبلی ==> (2) ، تقسیم بر (4) . یا $10 X 2 / 4 = 5$ .........→ 5 -- 1

ضریب حد ششم : عبارت است از حاصل ضرب ضریب قبلی (5) ضرب توان حرف a در حد قبلی ==> (1) ، تقسیم بر (5) $5 X 1 / 5 = 1$ .........→ 6 -- 1

مراحل فوق را چنین خلاصه مینمایم :

ضریب حد n ام (nth) یك بای نومیل عبارت است از :

(1) 1 ، اگر n=1 باشد.

$$\frac{AB}{C} \quad (2)$$

که A ضریب قبلی است و B توان (حد a ) در حد قبلی میباشد .

و C عبارت از (n − 1) است . که n ==> نمبر حد است .

مثال سوم : انکشاف $(m+n)^{10}$ رادر ذیل مطالعه نمایید.

حد اول عبارت است از ............................ $m^{10}$

حد دوم $\frac{1 \times 10}{1}(m^9 n^1) = 10 m^9 n^1$ ......

حد سوم $\frac{9 \times 10}{2} m^8 \cdot n^2 = 45 m^8 n^2$ ..................

حد چارم $\frac{45 \times 8}{3} m^7 n^3 = 120 m^7 n^3$ ................

حد پنجم $\frac{120 \times 7}{4} m^6 n^4 = 210 m^6 n^4$ ....................

حد ششم $\frac{210 \times 6}{5} m^5 n^5 = 252 m^5 n^5$ ...............

ضریب های متباقی عبارت اند از :  ..... 1 , 10 , 45 , 120 , 210 , 210

نتیجه انکشاف

$$(m+n)^{10} = m^{10} + 10m^{9}n^{1} + 45m^{8}n^{2} + 120m^{7}n^{3} + 210m^{6}n^{4} + 252m^{5}n^{5}$$

$$+ 210m^{4}n^{6} + 120m^{3}n^{7} + 45m^{2}n^{8} + 10m^{1}n^{9} + n^{10}$$

---

تمرین : انکشاف بدهید :   $5.\ (x-y)^{9} = ?$

---

# طریقه سوم : انکشاف بای نومیل با استفاده از عددنویسی فیکتوریل

فرضاً، در مطابقت $(a+b)^{11}$ ، ما حد هشتم را در یافت مینماییم ؟

به اساس طریقه قبلی میتوان این حد ( هشتم ) را دریافت نمود، ولی ، بسیار طولانی خواهد بود . درین جا ، ما طریقه را تحت غور میگیریم که بدون انکشاف بای نیومیل حد مطلوب را بدست بیاوریم . این طریقه در ریاضیات عالی ( در آینده ) اهمیت دارد .

جهت مطالعه این طریقه در این جا لازم است که مفهوم « فیکتوریل » را معرفی کنیم مانند:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

قاعده عمومی جهت فیکتوریل چنین خلاصه میشود .

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \ldots 3 \times 2 \times 1$$

به (1) آخر میشود و به n شروع میگردد.

مثال ها:

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$4! = \quad 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$3! = \quad 3 \times 2 \times 1 = 6$

$2! \quad 2 \times 1 = 2$

$1! \quad 1 = 1$

---

تمرین :

6. $8! = ?$

7. $9! = ?$

---

درین تعریف ها در نظر داشته باشیم که $0! = 1$ و همچنان $6! = 6 \times 5!$

یا طور ذیل خلاصه میشود :

برای هر عدد طبعی n ما داریم :

$$n! = n(n-1)!$$

خارج قسمت فیکتوریل ذیل را ساده نمائید :

$$\frac{8!}{5!3!} =$$

مثال پنجم :

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)(3 \times 2 \times 1)} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

یا

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!(3 \times 2 \times 1)} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

تمرین :

7. $9! = ?$

6. $8! = ?$

9. $\frac{8!}{6!\,2!} = ?$

8. $\frac{9!}{5!\,4!}$

11. $\frac{4!}{4!\,0!} = ?$

10. $\frac{7!}{6!\,1!} = ?$

مثال ششم :

$$\frac{7!}{2!\,5!} = ?$$

$$\frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 X 6 X 5!}{(2 X 1)\,5!} = \frac{7 X 6}{2 X 1} = 7 X 3 = 21$$

مثال هفتم :

$$\frac{6!}{6!\,0!} = ?$$

$$\frac{6!}{6!\,0!} = \frac{6!}{6!\,(1)} = 1$$

$$\frac{9!}{8!\,1!} = ?$$

$$\frac{9!}{8!\,1!} = \frac{9 X 8!}{8!\,(1) = 9}$$

ضریب بای نومیل را از طریق فیکتوریل چنین دریافت کرده میتوانیم :

در انکشاف بای نومیل $(a+b)^n$ ، ضریب حد ( $a - b$ ) مساوی است به :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

n توان بای نومیل است .

r نمبر حد ( حد چندم )

و سیمبول $\{{n \atop r}\}$ که مخفف فیکتوریل خارج قسمت فوق میباشد، برای کسر فوق عوض مینماییم ،

یا به عباره دیگر :

$$\{{n \atop r}\} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

این فورمول برای دریافت ضریب حد بکار برده میشود .

مثال هشتم :

ارزیابی نمائید : $\{{9 \atop 6}\} = ?$

$n=9$

$r=6$

$$\{{9 \atop 6}\} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9X8X7X6!}{(3X2X1)6!} = \frac{9X8X7}{3X2X1} = 3X4X7 = 84$$

مثال نهم :

ارزیابی نمَائید : $\{{7 \atop 1}\} = ?$ $n=7$

$r=1$

$$\{{7 \atop 1}\} = \frac{7!}{6!1!} = \frac{7!}{6!1!} = \frac{7X6!}{6!(1)} = 7$$

نوت : $\{{n \atop r}\}$ به مفهوم $\frac{n}{r}$ نیست .

تمرین : ارزیابی نمائید : $\{{9 \atop 1}\}$ , $\{{7 \atop 6}\}$ , $\{{8 \atop 5}\}$ , $\{{6 \atop 0}\}$

.14 .13 .12 .15

## قضیه دهم بای نومیل :

برای هر بای نومیل a + b ، و هر عدد طبیعی n ، رابطهٔ ذیل صدق میکند .

$$(a+b)^n = \{ {n \atop 0} \} a^n + \{ {n \atop 1} \} a^{n-1} b + \{ {n \atop 2} \} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots \{ {n \atop n} \} b^n .$$

مثال 10 :

انکشاف بدهید . $(2x+3)^4 = ?$

نوت کنید $a = 2x \quad b = 3 \quad , \quad n = 4$

$$(2x+3)^4 = \{ {4 \atop 0} \} (2x)^4 + \{ {4 \atop 1} \} (2x)^3 (3)^1 + \{ {4 \atop 2} \} (2x)^2 (3)^2 + \{ {4 \atop 3} \} (2x)^1 (3)^3 + \{ {4 \atop 4} \} (3)^4$$

$$= \frac{4!}{4!0!} (16x^4) + \frac{4!}{3!1!} (8x^3)(3)^1 + \frac{4!}{2!2!} (4x^2)(9)$$

$$+ \frac{4!}{1!3!} (2x)(27) + \frac{4!}{0!4!} (81)$$

$$= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81 .$$

مثال 11 :

انکشاف بدهید :

$$(x^2 - 2y)^5 = \{ {5 \atop 0} \} (x^2)^5 + \{ {5 \atop 1} \} (x^2)^4 (-2y)^1 + \{ {5 \atop 2} \} (x^2)^3 (-2y)^2 + \{ {5 \atop 3} \} (x^2)^2 (-2y)^3 + \{ {5 \atop 4} \} x^2 (-2y)^4 + \{ {5 \atop 5} \} (-2y)^5$$

$$= \frac{5!}{5!0!} (x)^{10} + \frac{5!}{4!1!} (x)^8 (-2y) + \frac{5!}{3!2!} x^6 (4y^2)$$

$$+\frac{5!}{2!3!}(x)^4(-8y^3)+\frac{5!}{1!4!}(x)^2(16y^4)$$

$$+\frac{5!}{0!5!}(-32y^5)$$

$$=x^{10}-10x^8y+40x^6y^2-80x^4y^3+80x^2y^4-32y^5.$$

---

تمرین : انکشاف بدهید :

16. $(x^2+5b)^5$ 18. $(3a+4b)^7$

17. $(x-y^2)^4$ 19. $(3x-2)^{10}$

---

حدچارم بای نومیل را در یافت نمایید .

18. $(3a+4b)^7$

حدنهم بای نومیل را در یافت نمایید.

19. $(3x-2)^{10}$

فرضاً، میخواهیم حد معین انکشاف یك بای نومیل رامعلوم نماییم . با استفاده از فورمول ذیل میتوانیم حد مطلوب را بدون آنکه متباقی حدود را محاسبه نماییم پیدا کنیم .

حد $(r+1)$ام ------> $(a+b)^n$

$$\text{--->}\left\{\binom{n}{r}\right\}a^{n-r}Xb^{r}\text{------>}\ \text{یا}\ \left\{\binom{n}{r}\right\}a^{n-r}Xb^{r}$$

مثال 12 :

حد پنجم بای نومیل رادر یافت نمایید: $(2x-5y)^6$

حد مطلوب $= r+1$

$5=4+1$ , $a=2x$ , $b=-5y$ , $n=6$ .

$5=r+1$

در حدپنجم قیمت r عبارت است از : ............................... $\leftarrow r = 4$

حد پنجم , $\binom{6}{4}(2x)^{6-4}(-5y)^{4} = \dfrac{6!}{2!4!}(2x)^{2}(-5y)^{4} = 37{,}500\,x^{2}y^{4}$

حد هشتم <===== $(3x-2)^{10}$ را در یافت کنید :

در حد هشتم ------> : r = 7 ( حد هشتم ) ، و چنین محاسبه میشود

( هشتم) $8 = 7+1$ , $a = 3x$ , $b = -2$ , $n = 10$ .

$$\binom{10}{7}(3x)^{10-7}(-2)^{7} = \frac{10!}{3!7!}(3x)^{3}(-128) = -414{,}720x^{3} .$$

---

## تمرین 5.1

---

انکشاف بدهید.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $(m+n)^5$ | 2. | $(a-b)^4$ | 3. | $(x-y)^6$ |
| 4. | $(p+q)^7$ | 5. | $(x^2-3y)^5$ | 6. | $(3c-d)^7$ |
| 7. | $(3c-d)^6$ | 8. | $(t^{-2}+2)^6$ | 9. | $(x-y)^3$ |
| 10. | $(x-y)^5$ | 11. | $[(1/x)+y]^7$ | 12. | $(2s-3t^2)^3$ |
| 13. | $[a-(2/a)]^9$ | 14. | $[2x+(1/x)]^9$ | 15. | $(1-1)^n$ |

16. $(1+3)^n$ 17. $(\sqrt{3}-t)^4$ 18. $(\sqrt{5}+t)^6$

ارزیابی کنید ؟

19. $6!$ 20. $4!$ 21. $1!$

22. $0!$ 23. $\binom{5}{0}$ 24. $\binom{7}{1}$

25. $\binom{8}{4}$ 26. $\binom{14}{2}$

حد های خواسته شده را در یافت نماید.

27. سوم, $(a+b)^6$ 28. ششم , $(x+y)^7$

29. دوازدهم , $(a-2)^{14}$ 30. یازدهم, $(x-3)^{12}$

31. پنجم , $(2x^3-\sqrt{y})^8$ 32. چارم , $[1/b+b/3]^7$

حد وسطی ( 33 ) را در یافت نمائید .

33. $(2u-3v^2)^{10}$

دو حد وسطی ( 34 ) انکشاف این بای نومیل را در یافت نمایید.

34. $(\sqrt{x}+\sqrt{3})^5$

انکشاف بدهید :

35. $(x^{-2}+x^2)^4$ 36. $[(1/\sqrt{x})-\sqrt{x})]^6$

37. $(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$ 38. $(1-\sqrt{2})^4+(1+\sqrt{2})^4$

## ج : اعمال اربعه الجبری بالای اعداد حقیقی :

I – عملیه ء جمع : میدانیم که جمع کردن اعداد غیر منفی اشکال ندارد. بیائید عملیه جمع را دوباره در صورتی تکرار نمائیم که اعداد منفی نیز شامل آن باشند.

۱– وقتیکه دو عدد منفی را باهم جمع می نماییم ، جمع قیمت های مطلقه آنها را دریافت کرده ، در جلو (طرف چپ نتیجه) علامهء منفی میگذاریم .

۲– وقتیکه عدد منفی را با عدد مثبت جمع می نماییم ، فرق قیمت های مطلقه آنها را دریافت کرده ، و در جلو (طرف چپ نتیجه) علامهء عدد بزرگتر را میگذاریم . اگر قیمت های مطلقه مساوی باشند جمع آنها مساوی به صفر است .

مثالها: جمع نمایید.

$-5+(-6)=-11$ ,

$8.6+(-4.2)=4.4$ ,

$-5+3=-2$ ,

$-3/4+(-7/8)=-13/8$ ,

$\pi+(-\pi)=0$ ,

$-\sqrt{3}+(-4\sqrt{3})=-5\sqrt{3}$ ,

$8+(-5)=3$ ,

$-9/5+3/5=-6/5$ ,

---

تمرین : سوالات 15 به 20 راحل کنید:

15. $-5+(-7)=?$

16. $-1.2+(-3.5)=?$

17. $-6/5+2/5=?$

ارزیابی کنید :

39. $\binom{16}{11}, \binom{16}{5}$

برای عدد مکمل n و r ثبوت کنید .

40. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

41. از انکشاف رابطه $[(3x^2/2) - (1/3x)]^{12}$ آن حد را در یافت نمائید که شامل x نباشد .

42. حدو سطی انکشاف بای نومیل را معلوم کنید .

$(x^2 - 6y^{3/2})^8$

43. از $\{a^2 - (1/2)a\sqrt[3]{c}\}^5$ نسبت حد چارم و سوم را در یافت کنید .

44. از $[\sqrt[3]{x} - 1/\sqrt{x}]^7$ حد را در یافت کنید که $1/x^{1/6}$ در آن شامل باشد

45. درجهٔ این افاده چند است . ؟ $(x^5 + 3)^4$

# فیکتورینگ ( Factoring )

**اهداف :**

با تکمیل کردن این بحث شما قادر خواهید بود که :

- سبك فیکتورینگ افاده هائی را که فیکتور میشوند در یافت نمایید .
- شش نوع طرز العمل فیکتورینگ را عملی نمائید .

---

## الف : فیکتورینگ پولینومیل ها:

وقتیکه یك پولینومیل رافیکتورمی نماییم ، در حقیقت عملیه تجزیه ضرب را اجراء مینماییم . فیکتورینگ ، به مفهوم دریافت افاده های معادل یك افاده است به حالت ضرب . فیکتورینگ مهارت مهم الجبری میباشد.

### حدهای دارای ضریب های مشترك :

وقتیکه یك افاده را فیکتورمی نماییم ، باید نخست ضریبی راجستجو نماییم که بین همه حد ها مشترك باشد.

**مثال اول:**

فیکتور نمایید.

1. $4x^2 + 8$

$4x^2 + 8 = 4(x^2 + 2)$

2. $12x^2y - 20x^3y = 4x^2y(3 - 5x)$

3. $7x\sqrt{y} + 14x^2\sqrt{y} - 21\sqrt{y} = 7\sqrt{y}(x + 2x^2 - 3)$

**مثال دوم :**

4. $(a-b)(x+5)+(a-b)(x-y^2)$

فیکتور نمایید.

$=(a-b)[(x+5)+(x-y^2)]=(a-b)(2x+5-y^2)$

5. $y^2+3y+4y+12=y(y+3)+4(y+3)$

$=(y+4)(y+3)$

**مثال سوم :**

فیکتور نمایید.

6. $ax^2+ay+bx^2+by=a(x^2+y)+b(x^2+y)=(x^2+y)(a+b)$

**تفاوت مربع ها :**

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

فیکتور نمائید :

7. $x^2-9=(x+3)(x-3)$

8. $y^2-2=(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})$

9. $9a^2-16x^4=(3a)^2-(4x^2)^2=(3a+4x^2)(3a-4x^2)$

10. $9y^4-9x^4=9(y^4-x^4)$

$=9(y^2+x^2)(y^2-x^2)$

$=9(y^2+x^2)(y+x)(y-x)$

---

**تمرین :** 1 ---> 7 فیکتور کنید :

1. $20x^3y+12x^2y$
2. $(p+q)(x+2)+(p+q)(x+y)$
3. $4x^2+20x-3x-15$
4. $x^2-16$

---

5. $25y^4 - 16x^2$

6. $2y^4 - 32x^4$

7. $x^2 - 3$

---

## ترای نومیل هائیکه میتوان آنها را به بای نیومیل مربع تبدیل نمائیم :

$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ $\qquad$ $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

ترای نومیل یکه میخواهیم آنرا به بای نومیل مربع تبدیل نمائیم ، باید شامل دو حد جذر مربع بوده ، و حد سوم آن مساوی به دو چند جذور حد های مربع دار باشد.

مثال : فیکتور نمائید :

11. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

12. $16y^2 + 56y + 49 = (4y + 7)^2$

13. $-4y^2 - 144y^8 + 48y^5 = -4y^2(1 + 36y^6 - 12y^3)$

$= -4y^2(1 - 12y^3 + 36y^6)$

$= -4y^2(1 - 6y^3)^2$

---

تمرین : 8 الی 10 فیکتور کنید :

8. $9y^2 - 30y + 25$

9. $16x^2 + 72xy + 81y^2$

10. $12x^4y^2 + 60x^2y^5 - 75y^8$

---

## ترای نومیلی که به شکل مربع مکمل فکتور شده نمیتواند:

بعضی ترای نومیل ها که به مربع مکمل تبدیل شده نمیتوانند ، میتوان آنها را به دو بای نومیل فیکتور نمود ، و جهت این فیکتورینگ فورمول ذیل را بکار میبریم .

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

**مثال** 14:

فیکتور نمایید : $x^2 + 7x + 12$

حل : نخست دو قوس را در حالت ضرب چنین می نویسیم :

$$(x \qquad)(x \qquad)$$

حاصل ضرب حدهای اول قوس ها ، حد اول معادله ، و حاصل ضرب حد های دومی قوس باید حد آخر معادله را بدهد . و مجموع الجبری حاصل ضرب حدهای اول و دوم حد متوسط معادله را بدهد .

$$= (x + 3)(x + 4)$$

**مثال** 15 : $3x^2 - 10x - 8$

فیکتور نمایید:

طریقه اول :

ما آن بای نومیل $cx + d$ و $ax + b$ را جستجو می نماییم که حاصل ضرب حد های اول آن $3x^2$ را بدهد ، و حاصل ضرب حد های آخری عدد $-8$ را بدهد .

جواب این است : $(3x + 2)(x - 4)$

طریقه دوم :

$$3x^2 - 10x - 8 = 3x^2 - 12x + 2x - 8$$

$$= 3x(x - 4) + 2(x - 4)$$

$$= (3x + 2)(x - 4).$$

## مجموع یا تفاوت مکعب ها :

جهت فیکتور کردن مجموع یا تفاوت مکعب ها ، فورمولهای ذیل را بکار میبریم :

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

**مثال 16 :**

فیکتور نمایید.

$$x^3 - 27 = ?$$

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3$$

در یك قوس جذر مکعب را نوشته و قوس دوم را به ترتیب ذیل انکشاف میدهیم :

برحد

جهت خانه پری قوس دوم قاعدهء ذیل را در نظر میگیریم : $(x-3)(\quad)$

مطابق قوس اول :

( 1 )..................... حد اول را مربع سازید.

( 2 )............... هر دو حد را ضرب کرده علامه آنرا تغیر بدهید

( 3 )............... حد اخر را مربع سازید

قوس دوم ......$\leftarrow x^2 + 3x + 9$ $\qquad (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

که دیگر فیکتور نمیشود .

---

**تمرین :** از 11 الی 18 فیکتور کنید :

11. $x^2 + 5x - 14$

12. $3x^2 + 5x + 2$

13. $6x^4 y^6 - 9x^2 y^3 - 60$

---

14. $x^3 - 8$

15. $64 - t^3$

16. $27x^3 + y^3$

17. $8m^3 + 125t^3$

18. $128y^7 - 250x^6 y$

---

**مثال 17 :**

فیکتور نمایید:

$125x^3 + y^3 = ?$

$125x^3 + y^3 = (5x)^3 + y^3$

برای در یافت قوس دوم از $(5x + y)$ قاعده ذیل را تعقیب می نماییم :

$(5x + y)(\qquad\qquad)$

(1) حد اول را مربع مینماییم . ...................... $25x^2$

(2) هر دو حد را ضرب نموده علامه را تغیر میدهیم . $-5xy$

(3) حدآخر را مربع‌مینماییم . $y^2$

جواب $(5x + y)(25x^2 - 5xy + y^2)$

**مثال 18 :**

$16x^7 y + 54x y^7$ .

$2xy(8x^6 + 27y^6) = 2xy\{(2x^2)^3 + (3y^2)^3\}$

$= 2xy(2x^2 + 3y^2)(4x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4)$

---

## تمرین 6 . 1

فکتور نمائید :

الف

1. $18a^2b - 15a^2b$
2. $4x^2y + 12xy^2$
3. $a(b-2) + c(b-2)$
4. $a(x^2-3) - 2(x^2-3)$
5. $x^2 + 3x + 6x + 18$
6. $3x^3 + x^2 - 18x - 6$
7. $9x^2 - 25$
8. $16x^2 - 9$
9. $4xy^4 - 4xz^2$
10. $5xy^4 - 5xz^4$
11. $y^2 - 6y + 9$
12. $x^2 + 8x + 16$
13. $1 - 8x + 16x^2$
14. $1 + 10x + 25x^2$
15. $4x^2 - 5$
16. $16x^2 - 7$
17. $x^2y^2 - 14xy + 49$
18. $x^2y^2 - 16x + 64$
19. $4ax^2 + 30ax + 56a$
20. $21x^2y + 2xy - 8y$
21. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
22. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$
23. $x^2 + 2xy + y^2 - a^2 - 2ab - b^2$
24. $r^2 + 2rs + s^2 - t^2 + 2tv - v^2$
25. $5y^4 - 80x^4$
26. $6y^4 - 96x^4$
27. $x^3 + 8$
28. $y^3 - 64$
29. $3x^3 - \frac{3}{8}$
30. $5y^3 + \frac{5}{27}$
31. $x^3 + 0.001$
32. $y^3 - 0.125$

33. $3z^3 - 24$

34. $4t^3 + 108$

35. $a^6 - t^6$

36. $64m^6 + y^6$

37. $16a^7 b + 54ab^7$

38. $24a^2 x^4 - 375a^8 x$

39. $x^2 - 17.6$

40. $x^2 - 8.03$

41. $37x^2 - 14.5y^2$

42. $1.96x^2 - 17.4y^2$

( کمك : نخست ضریب مشترك 37 را خارج قوس بگیرید . )

( کمك : نخست ضریب 1.96 را خارج قوس بگیرید . )

فیکتور کنید :

---

43. $(x+h)^3 - x^3$

44. $(x+0.01)^2 - x^2$

45. $y^4 - 84 + 5y^2$

46. $11x^2 + x^4 - 80$

47. $y^2 - \frac{8}{49} + \frac{2}{7} y$

48. $x^2 + \frac{3}{5} x - \frac{4}{25}$

49. $t^2 - 0.27 + 0.6t$

50. $0.4m - 0.05 + m^2$

51. $x^{2n} + 5x^n - 24$

52. $4x^{2n} - 4x^n - 3$

53. $x^2 + ax + bx + ab$

54. $bdy^2 + ady + bcy + ac$

55. $\frac{1}{4} t^2 - \frac{2}{5} t + \frac{4}{25}$

56. $\frac{4}{27} r^2 + \frac{5}{9} rs + \frac{1}{12} s^2 - \frac{1}{3} rs$

57. $25y^{2m} - (x^{2n} - 2x^{n} + 1)$

58. $4x^{4n} + 12x^{2a} + 10x^{2a} + 30$

59. $3x^{3n} - 24y^{3m}$

60. $x^{6a} - t^{3b}$

61. $(y-1)^{4} - (y-1)^{2}$

62. $x^{6} - 2x^{5} + x^{4} - x^{2} + 2x - 1$

18. $0.5 + (-0.7) = ?$

19. $8 + (-3) = ?$

20. $14/3 + (-14/3) = ?$

## افاده های کسری ....... 1.7

**اهداف 1-6 :**

با تکمیل کردن این بحث شما قادر خواهیدشدکه :

افاده های کسری را ساده نمایید .

افاده های کسری راضرب، تقسیم و ساده نمایید .

افاده های کسری را جمع ، تفریق و ساده نمایید .

افاده های کسرالکسر راساده نمایید .

---

افاده های ذیل بنام افاده های کسری یاد میشوند .

$$\frac{8}{5}\ ,\ \frac{x^2-9}{x-3}\ ,\ \frac{3x^2+5\sqrt{x}-2}{x^2-y^2}\ ,\ \frac{x-3}{x^2-x-2}$$

افاده های کسری، در حقیقت از عملیه تقسیم نماینده گی مینمایند . تعویض کردن بعضی اعداد که مخرج را صفر بسازد جائیز نیست ، زیرا عدد تقسیم به صفر لایتناهی میشود .

مثلاً : در افاده های کسری ذیل مخرج کسر برای دو قیمت صفر خواهد شد ، و آن دوقیمت x را چنین دریافت می نمائیم .

$$\frac{x-3}{x^2-x-2}\ ,\qquad x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$(x+1)=0 \qquad (x-2)=0$$

$$x_1=-1 \qquad x_2=2$$

مخرج کسر را مساوی به صفر قرار میدهیم،بعداً آنرا چنین محاسبه مینماییم :

یعنی قیمت (1 −) ، و (2) برای قیمت x در افاده فوق جائز نیست . دیگر تمام اعداد حقیقی x ، غیر از (1−) و 2 اعداد جائز اند.

---

تمرین : اعداد تعویضی جایز را در رابطه ذیل در یافت نمائید :

1. $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ 2. $= \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + 7x + 12}$

---

### ضرب و تقسیم افاده های کسری:

هنگامیکه دو افاده کسری را با هم ضرب مینماییم ، صورت یکی با صورت دومی ، و مخرج یکی با مخرج دومی ضرب میشوند . اما وقتیکه یك کسر را بالای کسر دومی تقسیم نماییم ، کسر صورت با معکوس کسرمخرج ضرب میشود ( کسرالکسر ) .

**مثال اول:**

ضرب نمایید .

$$\frac{x+3}{y-4} \times \frac{x^3}{y+5} = \frac{(x+3)x^3}{(y-4)(y+5)} = \frac{x^4 + 3x^3}{y^2 + y - 20}$$

**مثال دوم :**

تقسیم نمایید:

$$\frac{x-2}{y+1} \div \frac{x+5}{x-3} = \frac{x-2}{x+1} \times \frac{x-3}{x+5} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+5)}$$

$$= \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 6x + 5}$$

تمرین :

ضرب نمائید :

3. $$\frac{x+y}{2x^2-1} \times \frac{x+y}{7x}$$

تقسیم نمائید :

4. $$\frac{x-2}{x+2} \div \frac{x+2}{x+4}$$

ضرب نمائید :

5. $$\frac{x+2}{x-5} \text{ به } \frac{x+3}{x+3}$$

---

## ساده ساختن افاده های کسری:

در عملیه ساده ساختن افاده های کسری ، نخست صورت و مخرج را طوری فیکتور مینماییم که یکی بالای دیگر اختصار شده بتواند .

مانند:

**مثال** 3 :

ضرب نمایید:

ضرب 1

$$\frac{y+4}{y-3} \times \frac{y-2}{y-2} = \frac{(y+4)(y-2)}{(y-3)(y-2)} = \frac{y^2+2y-8}{y^2-5y+6} = \frac{y+4}{y-3}$$

**مثال 4 :**

ساده سازید:

افاده را فیکتور نمائید .

$$\frac{15x^3y^2}{20x^2y} = \frac{(5x^2y)\,3xy}{(5x^2y)\,4}$$

ضریب (1) را خارج نمائید .

$$= \left(\frac{5x^2y}{5x^2y}\right) X \frac{3xy}{4}$$

$$= \frac{3xy}{4}$$

---

**تمرین :**

ساده نمائید ، تعویض های جایز را درین افاده ها نام ببرید و افاده ها را ساده کنید .

6. $\frac{6x^2+4x}{2x^2+4x}$ 7. $\frac{y^2+3y+2}{y^2-2}$

---

صورت و مخرج را فیکتور نمائید .

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{2x+1} X \frac{x-1}{x-1} = \frac{x+1}{2x+1}$$

یا ← $\{x^2-1\}/\{2x^2-x-1\} = (x-1)(x+1)/(2x+1)(x-1)$ ← ر

$= (x-1)/(x+1)\ X\ (x-1)/(2x+1)$

$= (x+1)/(2x+1)$

## ضرب ، تقسیم و ساده ساختن افاده های کسری :

### مثال 4 :

ضرب نموده و ساده سازید:

6. $$\frac{x+2}{x-2} \times \frac{x^2-4}{x^2+x-2} = \frac{(x+2)(x^2-4)}{(x-2)(x^2+x-2)}$$

ضرب کردن ، فیکتور کردن

$$= \frac{(x+2)(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-1)}$$

ضریب (1) را خارج نمایید.

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{x+2}{x-1} = \frac{x+2}{x-1}$$

1 1

### مثال 7 :

7. $$\frac{a^2-1}{a+1} \div \frac{a^2-2a+1}{a+1} = \frac{a^2-1}{a+1} \times \frac{a+1}{a^2-2a+1}$$

$$= \frac{(a+1)(a-1)(a+1)}{(a+1)(a-1)(a-1)} = \frac{a+1}{a-1}$$

1

---

تمرین :

تقسیم نموده ساده سازید :

9. $$\frac{a^2-b^2}{ab} \div \frac{a^2-2ab+b^2}{2a^2b^2}$$

ضرب نموده ساده سازید :

$$8. \quad \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x + y} \times \frac{3x + 3y}{x^2 - y^2}$$

---

**جمع وتفریق افاده های کسری:**

هر گاه دو افاده کسری دارای عین مخرج باشند، در آنصورت یکی از مخرج ها را بقسم مخرج مشترک نگاه کرده، صورت هارا با هم جمع یا تفریق مینمائیم . و اگر دارای مخرج مساوی نباشند . در آن وقت خورد ترین مخرج مشترک ( LCD ) آنها را در یافت کرده بعداً عملیه جمع یا تفریق را اجراء مینماییم .

**مثال 8 :**

جمع نمایید:

$$8. \quad \frac{3x^2 + 4x - 8}{x^2 + y^2} + \frac{-5x^2 + 5x + 7}{x^2 + y^2} = \frac{-2x^2 + 9x - 1}{x^2 + y^2}$$

**مثال 9 :**

$$9. \quad \frac{3x^2 + 4}{x - y} + \frac{5x^2 - 11}{y - x} = \frac{3x^2 + 4}{x - y} + \frac{-1}{-1} \times \frac{5x^2 - 11}{y - x}$$

$$= \frac{3x^2 + 4}{x - y} + \frac{-1(5x^2 - 11)}{-1(y - x)} = \frac{3x^2 + 4}{x - y} + \frac{11 - 5x^2}{x - y}$$

$$= \frac{-2x^2 + 15}{x - y}$$

**مثال 10 :**

جمع نمائید :

$$\frac{1}{2x} + \frac{5x}{x^2 - 1} + \frac{3}{x + 1}$$

نخست مخرج مشترک را پیدا میکنیم .

تمام مخرج ها عبارت از : ........ $2x\ (x+1)(x^2-1)$

یا ... $2x\ (x+1)(x+1)(x-1)$

خورد ترین مخرج مشترک عبارت است از : (LCD) ...... $2x\,(x+1)(x-1)$

$$\frac{1}{2x} \times \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{5x}{(x+1)(x-1)} \times \frac{2x}{2x}$$

$$+ \frac{3}{(x+1)} \times \frac{2x(x-1)}{2x(x-1)} = \frac{(x+1)(x-1) + 10x^2 + 6x(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{17x^2 - 6x - 1}{2x\,(x+1)(x-1)} \quad \text{یا} \quad \frac{17x^2 - 6x - 1}{2x^3 - 2x}$$

---

تمرین : جمع کنید :

10. $$\frac{2x^2 + 5x - 9}{x - 5} + \frac{x^2 - x + 11}{x - 5}$$

11. $$\frac{3x^2 + 4}{x - 5} + \frac{x^2 - 7}{5 - x}$$

12. $$\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{2x^2 - 3xy + y^2} + \frac{x + 4y}{2x - 2y}$$

---

**مثال 11 :**

در صورت امکان، ساده سازید.

**تفریق کنید :**

$$\frac{x}{x^2 + 5x + 6} - \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\frac{x}{x^2 + 5x + 6} - \frac{2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x}{(x + 2)(x + 3)} - \frac{2}{(x + 1)(x + 2)}$$

خورد ترین مخرج مشترک LCM ---> $(x+1)(x+2)(x+3)$

$$= \frac{x}{(x + 2)(x + 3)} \times \frac{x + 1}{x + 1} - \frac{2}{(x+1)(x+2)} \times \frac{x + 3}{x + 3}$$

$$= \frac{x(x+1) - [2(x+3)]}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2 + x - [2x+6]}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2x - 6}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2 - x - 6}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \qquad = \frac{x-3}{(x+1)(x+3)}$$

تمرین : تفریق نمائید :

$$13.\quad \frac{x}{x^2+11x+30} - \frac{5}{x^2+9x+20}$$

---

## افاده های کسری مختلط ( کسرالکسر ) :

در افاده های مختلط ، نخست تمام حد های صورت کسر عمده را جمع و یا تفریق کرده ، بعداً صورت را بالای مخرج تقسیم مینماییم . یا به عباره دیگر، نخست عملیه های جمع و تفریق صورت و مخرج کسر را تشکیل نموده ، سپس عملیه های تقسیم را اجراء میداریم :

**مثال 12 :**

ساده نمائید :

$$\frac{x+1/5}{x-1/3} = \frac{x\,X(5/5)+1/5}{x\,X(3/3)-1/3}$$

$$= \frac{(5x+1)/5}{(3x-1)/3}$$

$$= \frac{5x+1}{5} \text{ X } \frac{3}{3x-1}$$

$$= \frac{15x+3}{15x-5}$$

مثال 13

$$\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{1/a^2 - 1/b^2}{1/a + 1/b}$$

$$= \frac{(b^2/b^2)X\ 1/a^2 - (a^2/a^2)X\ 1/b^2}{(b/b)X\ 1/a + (a/a)X\ 1/b}$$

$$= \frac{(b^2 - a^2)\ /a^2 b^2}{(b + a)/ab}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} X \frac{ab}{a + b}$$

$$= \frac{(b - a)(b + a)\ ab}{(b + a)\ a^2\ b^2}$$

$$= \frac{b - a}{ab}$$

---

تمرین : ساده سازید !

14. $\frac{1 + x/a}{a - x^2/a}$

15. $\frac{1/a + 1/b}{1/a - 1/b}$

---

# مشخصات اعدادحقیقی در جمع الجبری

در حل معادلات الجبری ، و سایر کار های مربوط آن ، عوض اعداد ، سمبول ها بکار برده میشوند. چنانچه یکجا کردن حدهای مشابه یکی ازین طریقه ها است . طور مثال: 4x+7x چنین نوشته کرده میتوانیم : $4x + 7x = 11x$

هر دو افاده را چنین نوشته کرده میتوانیم : مجموعه (11x) ، عین مفهوم را ارایه میکند بدون توجه به اینکه سیمبول x از چه نمایندگی می نماید.

لذا افاده های معادل را چنین تعریف می نماییم :

**تعریف :**

هر گاه دوافاده برای هر تعویض ( بامعنی ) عین عدد را نماینده گی کند ، آن دو افاده باز باهم مشابه اند.

مفهوم از تعویض ( با معنی ) آنست که نتیجه هر دو افاده لایتناهی نشود. مثلا": در رابطه ذیل تعویض قیمت 2 ( بامعنی ) نمیباشد زیرا :

$$(8 + y)/(y - 2)$$

اگر y را با عدد 2 تعویض نماییم ، مخرج کسر صفر میگردد . و تقسیم به صفر عدد، نامحدود ( لایتناهی ) میباشد ، و ما میگوئیم که تعویض عدد 2 درین رابطه قیمت ( با معنی ) نمیباشد زیرا قیمت کسر ( لایتناهی ) میشود .

( عدد/0 = ∞ )

## تمرین ۷_۱

الف ) در تمرین های 1 الی 3 تمام قیمت های مجاز $x$ را در یافت نمائید .

1. $$\frac{3x-2}{x(x-1)}$$

2. $$\frac{(x^2-4)(x+1)}{(x+2)(x^2-1)}$$

3. $$\frac{7y^2-2y+4}{x(x^2-x-6)}$$

ب ) تمرین 4 ـ الی 6 را ساده سازید ، بعداً جانشین های مجاز آنرا در افاده های ساده شده دریافت کنید:

4. $$\frac{25x^2y^2}{10xy^2}$$

5. $$\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$$

6. $$\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$$

ج ) ضرب یا تقسیم کرده ساده سازید:

III

7. $$\frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2} \times \frac{1}{x+y}$$

8. $$\frac{r-s}{r+s} \times \frac{r^2 - s^2}{(r-s)^2}$$

9. $$\frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 - 3x^2} \times \frac{4x^3 - 9x}{7x - 49}$$

10. $$\frac{x^2 + 2x - 35}{3x^3 - 2x^2} \times \frac{9x^3 - 4x}{7x + 9}$$

11. $$\frac{a^2 - a - 6}{a^2 - 7a + 12} \times \frac{a^2 - 2a - 8}{a^2 - 3a - 10}$$

12. $$\frac{a^2 - a - 12}{a^2 - 6a + 8} \times \frac{a^2 + a - 6}{a^2 - 2a - 24}$$

13. $$\frac{m^2 - n^2}{r+s} \div \frac{m-n}{r+s}$$

14. $$\frac{a^2 - b^2}{x-y} \div \frac{a+b}{x-y}$$

15. $$\frac{3x+12}{2x-8} - \frac{(x+4)^2}{(x-4)^2}$$

16. $$\frac{a^2-a-2}{a^2-a-6} - \frac{a^2-2a}{2a+a}$$

17. $$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} \times \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$$

18. $$\frac{c^3+8}{c^2-4} \div \frac{c^2-2c+4}{c-4c+4}$$

19. $$\frac{(x-y)^2-z^2}{(x+y)^2-z^2} \div \frac{x-y+z}{x+y-z}$$

20. $$\frac{(a+b)^2-9}{(a-b)^2-9} \times \frac{a-b-3}{a+b+3}$$

21. $$\frac{3}{2a+3} + \frac{2a}{2a+3}$$

22. $$\frac{a-3b}{a+b} + \frac{a+5b}{a+b}$$

23. $$\frac{y}{y-1} + \frac{2}{1-y}$$

24. $$\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$$

25. $\dfrac{x}{2x - 3y} - \dfrac{y}{3y - 2x}$

26. $\dfrac{3a}{3a - 2b} - \dfrac{2a}{2b - 3a}$

27. $\dfrac{y}{x + 2} + \dfrac{2}{x^2 - 4}$

28. $\dfrac{5}{a - 3} - \dfrac{2}{a^2 - 9}$

29. $\dfrac{y}{y^2 - y - 20} + \dfrac{2}{y + 4}$

30. $\dfrac{6}{y^2 + 6y + 9} - \dfrac{5}{y + 3}$

31. $\dfrac{3}{x + y} + \dfrac{x - 5y}{x^2 - y^2}$

32. $\dfrac{a^2 + 1}{a^2 - 1} - \dfrac{a - 1}{a + 1}$

33. $\dfrac{9x + 2}{3x^2 - 2x - 8} + \dfrac{7}{3x^2 + x - 4}$

34. $\dfrac{3y}{y^2 - 7y + 10} - \dfrac{2y}{y^2 - 8y + 15}$

35. $\dfrac{5a}{a-b} + \dfrac{ab}{a^2-b^2} + \dfrac{4b}{a+b}$

36. $\dfrac{6a}{a-b} - \dfrac{3b}{b-a} + \dfrac{5}{a^2-b^2}$

37. $\dfrac{7}{x+2} - \dfrac{x+8}{4-x^2} + \dfrac{3x-2}{4-4x+x^2}$

38. $\dfrac{6}{x+3} - \dfrac{x+4}{9-x^2} + \dfrac{2x-3}{9-6x+x^2}$

39. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x-2} + \dfrac{x^2+2}{x^2-x-2}$

40. $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x-6}{x^2-4}$

ساده سازید:

41. $\dfrac{(x^2-y^2)/xy}{(x-y)/y}$

42. $\dfrac{(a-b)/b}{(a^2-b^2)/ab}$

43. $\dfrac{a-b^{-1}}{a+a^{-1}}$

44. $\dfrac{a-(a/b)}{b-(b/a)}$

---

45. $\dfrac{c+(8/c^2)}{1+(2/c)}$

46. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-3}+y^{-3}}$

47. $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{(x^2/y) - (y^2/x)}$ 48. $\dfrac{(a^2/b) - (b^2/a)}{a^2 - ab + b^2}$

49. $\dfrac{(x/y) - (y/x)}{(1/y) + (1/x)}$ 50. $\dfrac{(a/b) - (b/a)}{(1/a) - (1/b)}$

51. $\dfrac{x^2 y^{-2} - y^2 x^{-2}}{xy^{-1} + yx^{-1}}$ 52. $\dfrac{a^2 b^{-2} - b^2 a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

53. $\dfrac{a/(1-a) + (1+a)/a}{(1-a)/a + a/(1+a)}$ 54. $\dfrac{(1-x)/x + x/(1+x)}{(1-x)/x + x/(1-x)}$

55. $\dfrac{1/a^2 + 2/ab + 1/b^2}{1/a^2 - 1/b^2}$ 56. $\dfrac{1/x^2 - 1/y^2}{1/x^2 - 2/xy + 1/y^2}$

ساده سازید:

57. $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ 58. $\dfrac{1/(x+h) - (1/x)}{h}$

59. $\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ 60. $\dfrac{1/(x+h)^2 - 1/x^2}{h}$

61. $\left[\dfrac{(x+1)/(x-1)+1}{(x+1)/(x-1)-1}\right]^5$ 62. $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}$

اغلاط را در هر کدام از مثال های ذیل دریابید،بعداً آنها را تشریح نموده ، جواب صحیح را پیدا کنید:

63. $\dfrac{a}{b} \div \left(\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{4}\right) = \dfrac{a}{b} \times \left(\dfrac{3}{a} + \dfrac{4}{b}\right)$ (1)

$$= \frac{a}{b} \times \frac{3b + 4a}{ab} \qquad (2)$$

$$= \frac{a(3b + 4a)}{ab} \qquad (3)$$

$$= \frac{4a + 3b}{b} \qquad (4)$$

64. $$\frac{5x}{2y} + \frac{3y}{4x} = \frac{5x^2}{4xy} + \frac{3y^2}{4xy} \qquad (1)$$

$$= \frac{5x^2 + 3y^2}{4xy} \qquad (2)$$

$$= \frac{5x + 3y^2}{4y} \qquad (3)$$

$$= \frac{5x + 3y}{4} \qquad (4)$$

## ۸_۱ جذور و افاده های جذر دار :

**اهداف** : با تکمیل کردن این مبحث شما قادر خواهید شدکه :

- افاده های جذر دار را ساده سازید .
- پرابلم های عملی که شامل جذر باشندحل نمایید .
- کسر ها را با استفاده از مزدوج به کسور ناطق تبدیل کرده بتوانید .
- معلوم کنیدکه : آیا اعداد داده شده جانشین مجاز اند ؟

---

عدد a جذر مربع عدد c میباشد ، در صورتیکه $a^2 = c$ باشد. چنانچه ، $(-3)$ جذر مربع عدد 9 میشود . یا به عباره دیگر ، $9 = (-3)^2$ ، همچنان ، $(3)$ جذر مربع 9 نیز میشود ، زیرا : $3^2 = 9$ است .

عدد a جذر n ام (nth) عدد c است اگر $a^n = c$ باشد . بطور مثال : عدد 5 جذر مکعب عدد 125 میباشد، زیرا $5^3 = 125$ میشود. هرعدد حقیقی یك جذرمکعب حقیقی دارد.

سیمبول $\sqrt{a}$ جذر مربع غیر منفی ، عدد a و سیمبول $\sqrt[3]{a}$ جذر مکعب عددa را نشان میدهد. و $\sqrt[4]{a}$ جذر چارم غیر منفی را نشان میدهد. بطور خلاصه سیمبول $\sqrt[n]{a}$ جذر n ام ( nth ) عدد a را نماینده گی میکند. سیمبول" $\sqrt{\ }$ "را بنام جذر ( Radical ) ، و عددی را که زیر علامه جذر نوشته میشود ، بنام ریدی کند (Radicand) یا مجذور یاد میکنند. و همچنان عددn رابنام « اندکس » یاد مینمایند. a مجذور است .

### جذر های طاق و جفت :

هر عدد حقیقی مثبت دو جذر مربع دارد که یکی آن منفی و دیگرآن مثبت میباشد.

به همین ترتیب جذر چارم هر عدد، عدد منفی و مثبت میشود. به عباره دیگر جذر آن عدد که اندکس آن جفت میباشد، جذرهای آن نیز مثبت و منفی میباشند .

جذر مثبت یك عدد ، بنام جذر عمده یاد میشود. اگر جذر مانند: ( $\sqrt{4}$ و $\sqrt{18}$ ) بکار برده شوند، در آنصورت ، مرام جذر عمده است . و بر عکس اگر هدف جذر غیر مثبت باشد ، در آنصورت علامه های $-\sqrt{2}$ و $-\sqrt{18}$ بکار برده میشود .

**تعریف :**

در افاده ، $\sqrt[n]{a}$ ، اگر n جفت باشد، مرام از جذر عمدهٔ a است و جذر غیر مثبت با سیمبول $-\sqrt{a}$ نشان داده میشود .

## جانشین با مفهوم یا تعویضی مجاز:

در سیستم اعداد حقیقی ، عدد منفی جذر ندارد . هر جانشین برای حرف تحت علامه جذر ( $\sqrt{x}$ ) که اندکس آن جفت بوده و ریدیکند (Radicand) را منفی بسازد بنام جانشین بی مفهوم یاد میشود. جانشین مجاز آن است که حرف تحت جذر در اثر تعویض علامه منفی پیدا نکند .

هر عدد حقیقی ، مثبت ، منفی و یا صفر ، تنهایك جذر مکعب دارد ، و همین تعریف برای جذر طاق هر عدد نیز صدق میکند. چنانچه در $\sqrt[n]{a}$ اگر n طاق باشد، عدد a فقط یك جذر n ام دارد .

مثال ( 1 ): معلوم کنید که 0 ، و 3 در افاده ذیل جانشین های با مفهوم

اند یا خیر ؟

$\sqrt{5x-4}$.

عدد 0 را عوض x در ، $\sqrt{5x-4}$ ، تعویض می نماییم : $\sqrt{5(0)-4}=\sqrt{0-4}=-4$

چون این تعویض عدد ( − ) میدهد لذا (O) جانشین غیر مجاز است ، تعویض نه مینماییم . عدد 3 در $\sqrt{(5x-4)}$ ، $\sqrt{5(3)-4}=\sqrt{15-4}=11$

حال (3) را امتحان میکنیم ، چون نقطه تعویض عدد مثبت (11) است ، لذا این جانشین بامفهوم است .

به عباره دیگر : تعویض اول (O) ، غیر مجاز وتعویض دومی ، (3) مجاز است .

---

تمرین : قیمت های داده شده ، جانشین مجاز اند یا خیر ؟

1. $\sqrt{x-2}$ 5, −1,

2. $\sqrt{x+3}$ −7, −3, قیمت ها بجای x در رابطه تحت جذر تعویض می نمائیم .

3. $\sqrt{x^2}$ 18, −1 / 2,

4. $\sqrt{x^2+1}$ −23, 47.2,

---

## ساده ساختن افاده های جذر دار :

افاده ذیل را تحت غور بگیرید: $\sqrt{(-3)^2}$ این افاده معادل است به $\sqrt{9}$ که بعد از ساده ساختن مساوی میشود به عدد (3) . و همچنان $3=\sqrt{3^2}$ است . از مثال های فوق میتوان قانون عمومی ساده ساختن جذر های را که قیمت اندکس (n) آن عدد جفت باشد چنین خلاصه نماییم :

جهت تکرار، مشخصات اعداد حقیقی را در عملیه جمع فهرست می نمائیم ، واین مشخصات اند که بالای آنها تمام عملیه های( جمع ) الجبری استوار میباشند. این مشخصات بخصوص عمل مهارتی الجبر بوده ، ومارا اجازه میدهد که افاده معادل را در یافت نماییم.

## قواعد جمع الجبر :

۱ـ تغیر و تبدیل جای ( Commutativity ) :

ـ برای هر عدد حقیقی a و b نوشته کرده میتوانیم : $a+b=b+a$

( آن اعداد که باهم جمع میشوندترتیب درآنها شرط نیست زیرا در یکجا شدن آنها بالای نتیجه کدام تاثیر وارد نمیگردد )

۲ـ پیوستگی (associativity ) :

ـ برای هر عدد حقیقی a ، b وc نوشته کرده میتوانیم : $a+(b+c)=(a+b)+c$

هنگامیکه صرف عملیه جمع مطرح باشد، جهت گروپ بندی ، استعمال قوس ها به هر نوع که باشد بالای نتیجه تاثیر وارد نمی نمایدو جائیز است .

۳ـ مطابقت ( Identity ) : گرچه ، (O) عدد حقیقی میباشد که نظر به آن رابطه ذیل صدق میکند $a+0=0+a=a$

یاجمع کردن به عدد صفر ، دوباره همان عدد را میدهد .

٤ـ عکس العلامه (Inverser) : برای هر عدد حقیقی a عدد مخالف العلامه آن (a-) موجود میباشد که بنام عکس جمعی ( additive inverse ) یاد میشود.

مثلاً: $-a+a=a+(-a)=0$

## عکس های جمعی (Additive Inverses)

در بحث عکس های جمعی ، ما خواننده را به یك اشتباه بسیار مهم که در الجبر ابتدائی گاهی رخ میدهد، متوجه میسازیم . این معمول است که $-x$ ، منفی x خوانده

# فهرست مندرجات

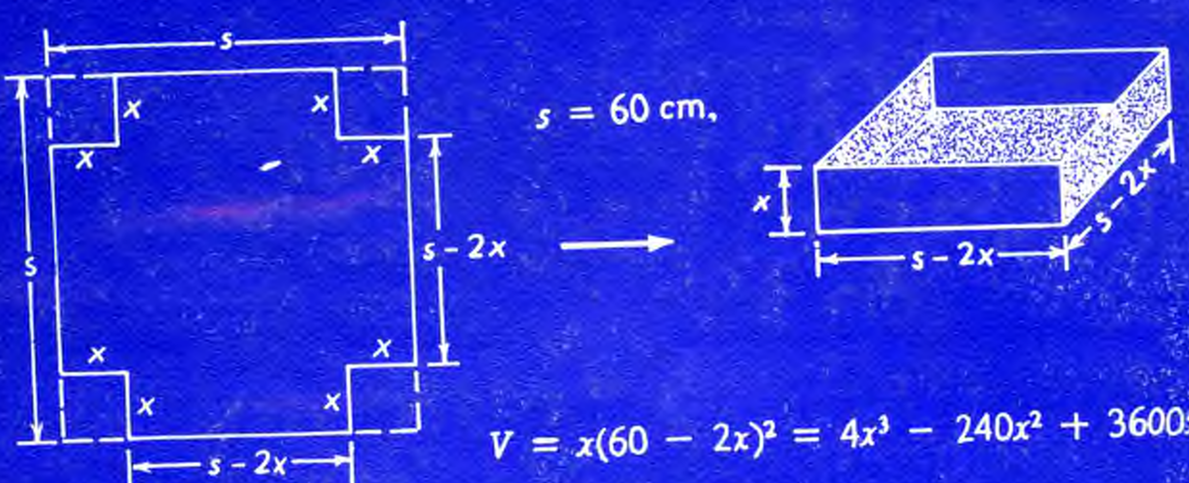
موضوع | صفحه

## فصل اول : اساسات الجبر

## فصل دوم :

پروگرام تربیهٔ قوای بشری

# مبادی الجبر




$$V = x(60 - 2x)^2 = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

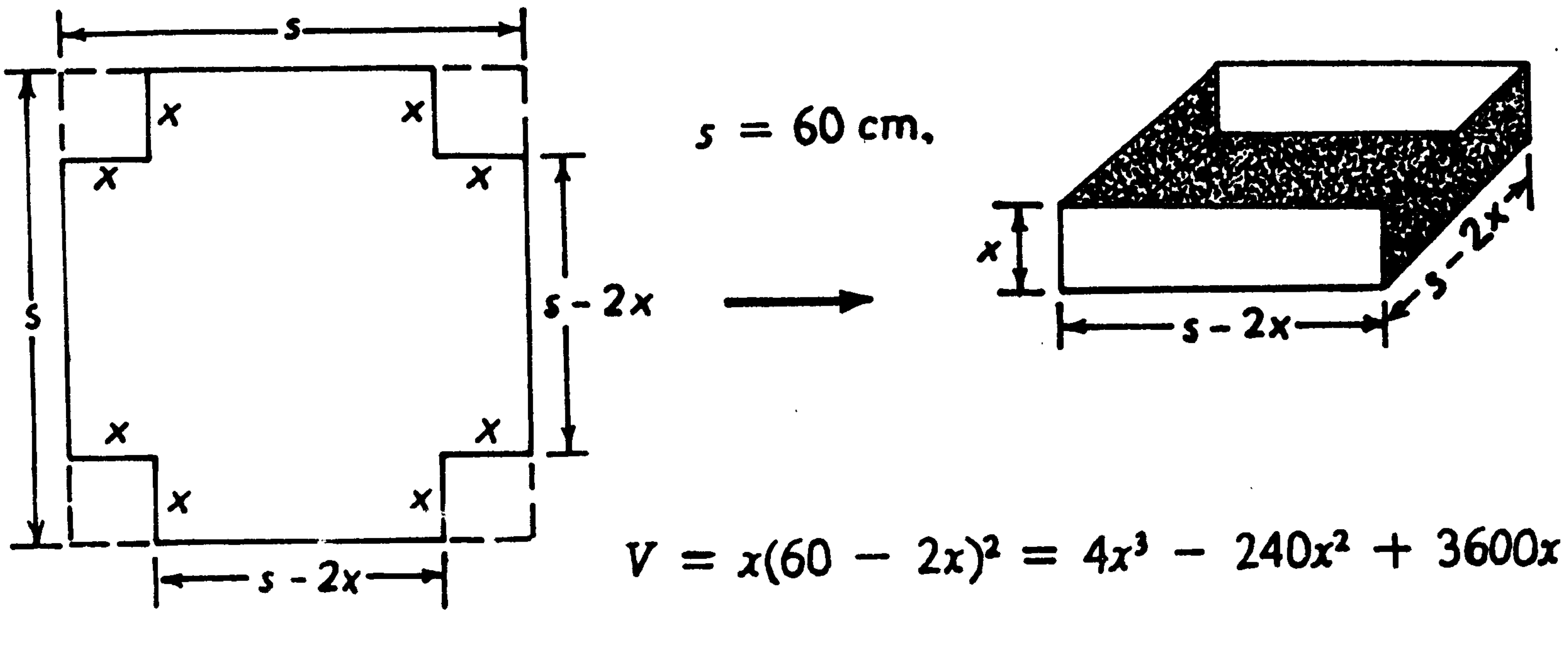
تالیف و ترجمه: پوهنمل انجنیر نظر محمد «کاریای»

سال ـ ۱۳۷۰ هـ ش

پروگرام تربیهٔ قوای بشری



# مبادی الجبر




$$V = x(60 - 2x)^2 = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

تالیف و ترجمه: پوهنمل انجنیر نظر محمد «کاریار»

سال ـ ۱۳۷۰ هـ ش

# بسم الله الرحمن الرحیم

# مبادی الجبر

## پیشگفتار

این کتاب برای شاگردانیکه جهت مشاغل تخنیکی و ساینسی آماده گی میگیرند تهیه وترتیب شده است . شاگردان ، با وصف انکه معلومات قبلی در الجبر نداشته باشند ، میتوانند اساسات الجبر را ازین کتاب بوبه بهتر و خوبتر آموخته ، آنرا در عمل تطبیق نمایند. در تهیه و ترتیب این کتاب سعی شده که در هر موضوع مورد نیاز بحث کافی صورت بگیرد و تمرینات متعدد عملی و تطبیقی ، مرحله به مرحله حل گردند.

مطالعه طرز العمل های این کتاب ، خواننده را به تطبیقات واقعی « علم الجبر در زندگی » رهنمائی میکند. تاکید بیشتر بالای مثالهای تخنیکی و مسلکی در نظر گرفته شده است . حل مثالهای متعدد و طرز العمل تحلیل ها ، کتاب را بیشتر تخنیکی میسازد. مجموعه این کتاب ، بعد از تدریس نوت های درسی برای مدت یکسال در پروگرام صنف ادونس « پروگرام تعلیمی قوای بشری (MTP) » تنظیم شده است .

**اهداف :**

قبل از هر موضوع ، اهداف آموزشی که بیان کرد مطالب مطروحه بوده، بیان شده اند. این اهداف شاگرد را به مطالعه آموزشی آشنا و رهنمائی میکند . شاگردان با مطالعه اهداف هر بحث ، از مفهوم الجبر اگاه میشوند ، که این شیوه خاص آنها را در رسیدن

به هدف مندی مشخص رهنمائی میکند.

در اخیر هر موضوع تحت بحث ، تمرین های کافی ارائه گردیده و شاگردان میتوانند با حل این تمرین ها و پرابلم ها، عبارتی توانائی ذهنی خویش را بیشتر تقویه نمایند. سوالات عبارتی ، پرابلم های تخنیکی شامل تمرینات و کار های خانه بوده که این شیوه خاص در توانائی ذهنی و حرکی شاگردان خالی از مفاد نمیباشد.

حل مثالهای متعدد ، شاگردان را بیشتر تشویق و توظیف مینماید که در پروسه آموزش سهم فعالتر بگیرند . این کتاب در تدریس علم الجبر ، ازین لحاظ مؤثریت بیشتر دارد که جوابات تمام تمرینات در اخیر کتاب علاوه شده اند . و همچنان طرز حل پرابلم های مشکل درین کتاب رهنمائی گردیده است . یك شاگرد میتواند از این کتاب با استفاده از جوابات تمام تمرینات ، بقسم کتاب کار (Work book) استفاده کند.

استعمال کلکولیتر ساینسی در تمرین های این کتاب تطبیق شده است ، که شاگردان با تطبیق محتوای این مجموعه ، با طرز استعمال کلکولیتر ساینسی نیز آشنائی و بلدیت پیدا میکنند.

در اخیر کتاب ضمیمه های جداول و معلومات ساینسی و تخنیکی علاوه شده که أفق نظر شاگردان را بیشتر تقویه مینماید.

همه ما میدانیم که ریاضی ( الجبر ، مثلثات ، و کلکولس . . . . . ) بحیث یك وسیله، در نصاب تعلیمی ، علوم طبیعی ، علوم اجتماعی و تکنالوژی جاه دارد . یا به عباره دیگر، موضوعات ساینس و قوانین طبیعت ( فزیك ، کیمیا و تکنالوژی ) راصرف با قواعد و تکنیك های ریاضی تحلیل کرده میتوانیم . تمام اندازه گیری های ساینسی و تخنیکی را با قواعد و فورمولهای ریاضی خوبتر درك و در عمل تطبیق کرده میتوانیم .

مقدمهٔ بسیار مختصر فوق الذکر، در مورد اهمیت کورس های ریاضی نکات برجسته را منعکس میسازد. و خواننده را معتقد میسازد که علم ریاضی بحیث یك کورس وسیلوی

لازمی و قبلی کورس های ساینس و تکنالوژی شناخته میشود .

با پیروی از نکات فوق الذکر محتوای این کتاب طوری تهیه و ترتیب شده است که علم الجبر ( علم بعد از حساب ) را به سویه مکاتب و لیسه های تخنیکی و مسلکی تحت مطالعه قرار بدهیم . این کتاب تحت عنوان « مبادی الجبر» موضوعات اساسی الجبر ، و سوالات عملی تطبیقی و تخنیکی را در بر دارد . چون درین کتاب موضوعات اساسی الجبر گنجانیده شده اند ، میتوانیم محتوای این کتاب را بنام کورس اول الجبرمسمی نمائیم .

بادر نظر داشت اگاهی ، شناخت ، و تجارب چندین ساله معلمی در مورد و سعت علم الجبر ، مولف احساس می نماید که محتوای علم الجبر در یك جلد نه، بلکه در دو جلد تهیه و ترتیب شود. این حالت از یك طرف حجم کتاب را موزون و بیشتر موجه ساخته، و از طرف دیگرمامیتوانیم سوالات متعدد عملی، تطبیقی و تخنیکی را در محتوای کتاب بگنجانیم .

باهمین مفکوره ، اینست اساسات علم الجبر را در جلد اول « مبادی الجبر» تحت بحث و مطالعه قرار میدهیم . و خاطر نشان میشود که موضوعات متباقی علم الجبر در جلد دوم « کتاب دوم الجبر»، با در نظر داشت تسلسل این کتاب، در آینده تهیه و ترتیب خواهند گردید .

انجنیر نظرمحمد « کاریار »